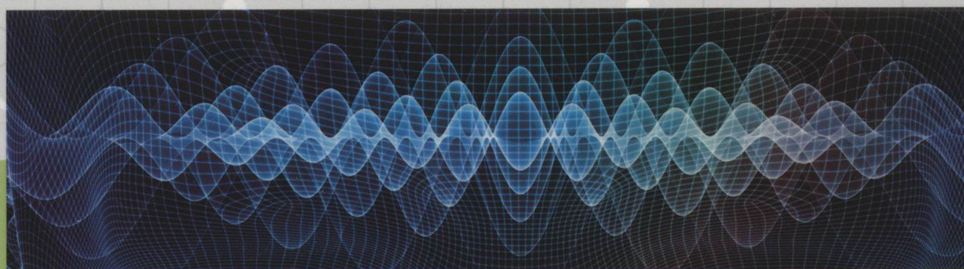
普通高等教育“十三五”规划教材



材料力学



MECHANICS OF MATERIALS

陈章华◎编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

普通高等教育“十三五”规划教材

材 料 力 学

陈章华　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是配合教育教学改革课题的研究成果，特点是：根据工程实践提出问题，然后运用科学研究的方法和思维方式形成基本理论，并指导和解决工程中的实际问题；尽可能介绍学科范围的新概念、新理论和新方法；对于某些工程实践中常见但是用传统的材料力学方法无法解决的问题，本书尝试使用数值方法，通过计算机解决；在保障学科体系完整的前提下，本书删繁就简，力求符合教与学的规律，注重启发式教学，如每章均设有思考题，为学生留有充分复习和思维的空间。

本书是传统纸质教材与移动网络教学相结合的多媒体教材，移动网络教学丰富了原纸质教材的内容，包括视频、解题思路、思考题答案和习题答案。使用方法：手机下载 App“书伴”，刮开封底涂层后，打开“书伴”扫描该二维码，注册并进行账户绑定，扫描任意页码上的二维码即可查看资源。

全书共 13 章，包括了材料力学的基础理论和有关的专题部分，各章均附有复习题和习题。

本书可作为普通高等学校和成人高等教育机械、土建和材料类专业的教材，也可作为参加高等教育自学考试的考生和工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

材料力学/陈章华编著. —北京：机械工业出版社，2017.6

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-111-56815-5

Ⅰ.①材…　Ⅱ.①陈…　Ⅲ.①材料力学-高等学校-教材　Ⅳ.①TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 105188 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

策划编辑：姜　凤　责任编辑：姜　凤　李　乐　责任校对：刘　岚

封面设计：鞠　杨　责任印制：李　昂

三河市国英印务有限公司印刷

2017 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm · 18.75 印张 · 462 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-56815-5

定价：39.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
服务咨询热线：010-88379833
读者购书热线：010-88379649

网络服务
机 工 官 网：www.cmpbook.com
机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
教育服务网：www.cmpedu.com
金 书 网：www.golden-book.com

封面无防伪标均为盗版

前　言

本书在面向21世纪课程教学内容与体系改革的基础上，进一步对材料力学的教学内容加以精选，并尽可能介绍工程实践与学科范围的新概念、新理论和新方法。对于某些工程实践中常见但是用传统的材料力学方法无法解决的问题，本书尝试使用数值方法，通过计算机解决。同时本书根据新的培养计划和教学基本要求，从一般院校的实际情况出发，删去传统材料力学上、下两册中大部分院校不需要的教学内容，大大压缩教材篇幅，以灵活满足60~80学时材料力学课程的教学要求。

本书增加了弹性力学基础以及位错应力场等内容，以满足材料专业学生了解位错应力场的需要，并充分注意到后续课程以及当代工程设计理念与分析方法的变革趋势，同时适当拓宽基础，强化应力与应变分析的基础知识和能力，在“应力应变分析与强度理论”一章中增加了使用有限元法进行数值模拟的内容与相关习题。

本书是传统纸质教材与移动网络教学相结合的多媒体教材，移动网络教学丰富了原纸质教材的内容，包括视频、解题思路、思考题答案和习题答案。使用方法：手机下载App“书伴”，刮开封底涂层后，打开“书伴”扫描该二维码，注册并进行账户绑定，扫描任意页码上的二维码即可查看资源。

本书共13章。包括：第1章绪论，第2章轴向拉伸、压缩与剪切，第3章扭转，第4章弯曲内力，第5章弯曲应力，第6章弯曲变形，第7章应力应变分析与强度理论，第8章组合变形，第9章压杆稳定，第10章能量方法，第11章超静定结构，第12章动载荷，第13章弹性力学基础。其中带*的章节教师可根据情况选用。

本书的编写得到了中国矿业大学（北京）黎立云教授和北京科技大学尚新春教授的指导和认真审阅，他们提出了许多宝贵意见。北京科技大学肖久梅副教授对于成书给予了帮助，袁媛同学帮助绘制部分图表，特表示感谢。本书的编写和出版得到了北京科技大学教材建设专项基金的支持。

衷心希望关心本书的广大读者对本书的缺点和不足之处提出宝贵意见。

编　者

目　录

前　言
第 1 章　绪论 …… 1
内容梗概 …… 1
1.1　材料力学的研究对象、内容及任务 …… 1
1.2　变形固体及其基本假设 …… 2
1.3　外力及其分类 …… 3
1.4　内力、截面法和应力的概念 …… 3
1.5　应变的概念 …… 5
1.6　杆件的基本变形形式 …… 7
本章小结 …… 8
思考题 …… 9
习题 …… 9
第 2 章　轴向拉伸、压缩与剪切 …… 11
内容梗概 …… 11
2.1　轴向拉伸与压缩杆件及实例 …… 11
2.2　横截面上的内力和应力 …… 12
2.3　材料拉伸时的力学性能 …… 17
2.4　材料压缩时的力学性能 …… 20
2.5　温度和时间对材料力学性质的影响 …… 22
2.6　许用应力、安全因数、强度条件 …… 23
2.7　轴向拉（压）杆件的变形 …… 26
2.8　拉（压）杆超静定问题 …… 29
2.9　温度应力和装配应力 …… 33
2.10　应力集中的概念 …… 35
2.11　连接件的实用计算 …… 36
本章小结 …… 41
思考题 …… 42
习题 …… 44
第 3 章　扭转 …… 51
内容梗概 …… 51
3.1　扭转及其工程实例 …… 51
3.2　扭矩和扭矩图 …… 51
3.3　薄壁圆筒的扭转 …… 54
3.4　圆轴扭转时的应力和强度条件 …… 55
3.5　圆轴扭转时的变形及刚度条件 …… 58
3.6　圆柱形密圈螺旋弹簧的应力和变形计算 …… 60
3.7　非圆截面杆的扭转问题 …… 61
3.8　薄壁杆件的自由扭转 …… 63
本章小结 …… 65
思考题 …… 66
习题 …… 67
第 4 章　弯曲内力 …… 69
内容梗概 …… 69
4.1　弯曲及其工程实例 …… 69
4.2　梁的基本形式 …… 70
4.3　梁的内力——剪力和弯矩 …… 70
4.4　剪力图和弯矩图 …… 71
4.5　剪力、弯矩和载荷集度之间的微分关系 …… 73
4.6　平面刚架和曲杆的内力图 …… 76
本章小结 …… 78
思考题 …… 79
习题 …… 80
第 5 章　弯曲应力 …… 84
内容梗概 …… 84
5.1　纯弯曲正应力 …… 84
5.2　横力弯曲正应力 …… 87
5.3　弯曲正应力强度条件 …… 87
5.4　梁的弯曲切应力及其强度条件 …… 90
5.5　提高弯曲强度的措施 …… 94
本章小结 …… 97
思考题 …… 97
习题 …… 100
第 6 章　弯曲变形 …… 103
内容梗概 …… 103
6.1　梁的挠度和转角 …… 103
6.2　挠曲线的近似微分方程 …… 104

6.3　用积分法求梁的位移 …… 104
6.4　用叠加法求梁的位移 …… 109
6.5　简单超静定梁 …… 114
6.6　梁的刚度条件 …… 115
6.7　提高梁刚度的措施 …… 116
本章小结 …… 117
思考题 …… 118
习题 …… 119

第7章　应力应变分析与强度理论 …… 122
内容梗概 …… 122
7.1　一点应力状态概念 …… 122
7.2　平面一般应力状态分析——解析法 …… 123
7.3　平面应力状态分析的图解法——应力圆法 …… 127
7.4　平面应力条件下的应变分析 …… 130
7.5　三向应力状态与最大切应力 …… 133
7.6　广义胡克定律 …… 135
7.7　复杂应力状态的应变比能 …… 140
7.8　强度理论概述 …… 142
7.9　工程中常用的四个强度理论 …… 143
7.10　相当应力 …… 146
7.11　强度理论的应用 …… 146
7.12　采用有限元法进行应力应变分析 …… 148
本章小结 …… 153
思考题 …… 155
习题 …… 158

第8章　组合变形 …… 165
内容梗概 …… 165
8.1　组合变形的基本概念 …… 165
8.2　拉伸或压缩与弯曲组合 …… 166
8.3　偏心拉伸或偏心压缩 …… 169
8.4　扭转与弯曲的组合 …… 172
本章小结 …… 176
思考题 …… 177
习题 …… 178

第9章　压杆稳定 …… 181
内容梗概 …… 181
9.1　压杆稳定的概念 …… 181
9.2　细长压杆的临界压力 …… 182
9.3　临界应力、经验公式和临界应力总图 …… 186
9.4　大柔度杆在小偏心距下偏心压缩时的稳定性 …… 190
9.5　压杆稳定性设计 …… 192
9.6　提高压杆承载能力的措施 …… 195
本章小结 …… 197
思考题 …… 198
习题 …… 199

第10章　能量方法 …… 203
内容梗概 …… 203
10.1　概述 …… 203
10.2　杆件应变能的计算 …… 205
10.3　互等定理 …… 211
10.4　单位载荷法　莫尔积分 …… 216
10.5　计算莫尔积分的图乘法 …… 219
本章小结 …… 222
思考题 …… 223
习题 …… 225

第11章　超静定结构 …… 228
内容梗概 …… 228
11.1　超静定结构概述 …… 228
11.2　用力法解超静定结构 …… 231
11.3　对称及反对称性质的应用 …… 234
本章小结 …… 238
思考题 …… 238
习题 …… 240

第12章　动载荷 …… 243
内容梗概 …… 243
12.1　动载荷的概念 …… 243
12.2　构件受冲击载荷作用时的动应力计算 …… 243
12.3　采用显式有限元法模拟冲击动应力* …… 246
本章小结 …… 247
思考题 …… 248
习题 …… 248

第13章　弹性力学基础 …… 252
内容梗概 …… 252
13.1　弹性力学的基本概念 …… 252
13.2　主应力 …… 253
13.3　平衡微分方程 …… 254
13.4　边界条件 …… 255
13.5　几何方程 …… 255
13.6　相容性条件 …… 257

13.7 物理方程 …… 258
13.8 用位移表达的平衡微分方程 …… 259
13.9 弹性力学问题的一般求解方法 …… 259
13.10 用位移平衡微分方程求解平面问题 …… 260
13.11 利用相容性条件按应力求解平面问题 …… 261
13.12 Airy 应力函数 …… 262
13.13 位错的应力场 …… 263
本章小结 …… 266
思考题 …… 266
习题 …… 267

附录 …… 269
附录 A 平面图形的几何性质 …… 269
A.1 静矩和形心 …… 269
A.2 惯性矩和惯性半径 …… 271
A.3 平行移轴公式 …… 272
A.4 转轴公式 主惯性轴 …… 273
本章小结 …… 276
思考题 …… 277
习题 …… 277
附录 B 型钢表（GB/T 706—2008） …… 279
参考文献 …… 294

1

第 1 章 绪论

内容梗概：材料力学研究工程构件的强度、刚度和稳定性问题。为了抽象出力学模型，掌握问题的主要属性，材料力学的理论框架建立在连续性假设、均匀性假设、各向同性假设和小变形假设基础之上。内力是指在外力作用下，物体内部各部分之间的相互作用。材料力学求内力的基本方法是截面法。应力是单位面积上的内力，变形是在载荷作用下，构件的形状和尺寸发生的变化，用正应变 ε 和切应变 γ 来度量。材料力学研究对象是杆件，变形形式为轴向拉伸和压缩、剪切和挤压、扭转、弯曲，以及上述变形的组合形式。

1.1 材料力学的研究对象、内容及任务

1. 几个术语

构件与杆件：组成机械的零部件或工程结构中的构件统称为构件。例如：图 1-1 所示桥式起重机的主梁、吊钩、钢丝绳，图 1-2 所示悬臂起重机架的横梁 *AB*、斜杆 *CD* 都是构件。

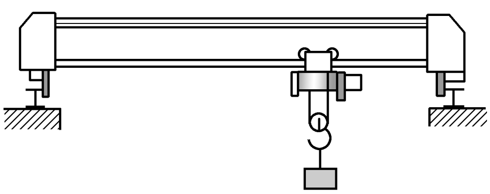


图 1-1　桥式起重机

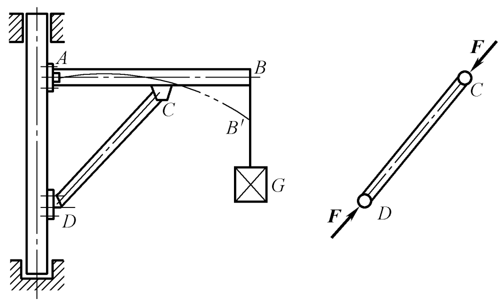


图 1-2　悬臂起重机架

实际构件有各种不同的形状，根据形状的不同可将构件分为：杆件、板和壳、块体。

杆件：长度远大于横向尺寸的构件，其几何要素是横截面和轴线，如图 1-3a 所示，其中横截面是与轴线垂直的截面；轴线是横截面形心的连线。

按横截面和轴线两个因素可将杆件分为：等截面直杆，如图 1-3a、b 所示；变截面直杆，如图 1-3c 所示；等截面曲杆和变截面曲杆，如图 1-3d 所示。

板和壳：构件一个方向的尺寸（厚度）远小于其他两个方向的尺寸，如图 1-4a、b 所示。

块体：三个方向（长、宽、高）的尺寸相差不多的构件，如图 1-4c 所示。由于材料力学的研究对象仅是杆件，本书中所谓构件一般即指杆件。

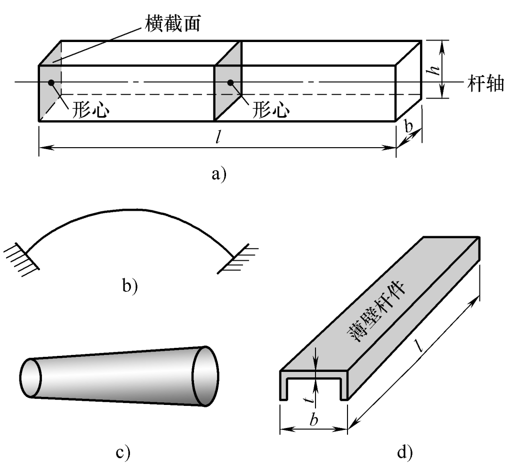


图 1-3　杆件的种类

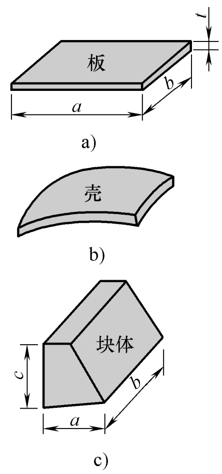


图 1-4　板、壳和块体

变形：在载荷作用下，构件的形状及尺寸发生变化称为变形，如图 1-2 所示悬臂起重机架的横梁 AB，受力后将由原来的位置弯曲到 AB'位置，即产生了变形。

2. 材料力学研究的基本内容

（1）强度　在外载荷作用下，材料抵抗破坏的能力。例如：储气罐爆破，机器中的齿轮轴断裂等。应当注意材料破坏不仅指断裂，塑性材料发生明显塑性变形也是破坏现象之一。

（2）刚度　在外载荷作用下，构件抵抗弹性变形的能力。例如，机床主轴变形过大时，影响加工精度。应当注意结构刚度既与材料有关，也和结构的几何尺寸及放置方式有关。

（3）稳定性　细长杆件或薄壁构件在特定压力作用下，保持其原有平衡状态的能力。例如：千斤顶的螺杆、内燃机的挺杆等。

3. 材料力学的任务

1）研究构件的强度、刚度和稳定性。

2）研究材料的力学性能。

3）为合理解决工程构件设计中安全与经济之间的矛盾提供力学方面的依据。

构件的强度、刚度和稳定性问题均与所用材料的力学性能有关，因此试验研究和理论分析是完成材料力学的任务所必需的手段。

1.2 变形固体及其基本假设

在外力作用下，一切固体都将发生变形，故称为变形固体，而构件一般均由固体材料制成，所以构件一般都是变形固体。

由于变形固体种类繁多，工程材料中有金属与合金、工业陶瓷、聚合物等，性质是多方

面的，而且很复杂，因此在材料力学中通常省略一些次要因素，对其做下列假设：

（1）连续性假设　认为整个物体所占空间内毫无空隙地充满物质。据此，可以将各种力学量表示成为坐标的连续函数。

（2）均匀性假设　认为物体内的任何部分，其力学性能相同。据此，从母材料上截出制成的小试样，其通过力学试验获得的各种力学性能参数应当与母材料的相同。

（3）各向同性假设　认为物体内在各个不同方向上的力学性能相同。应注意虽然金属材料具有晶体结构，然而在宏观尺度下大量晶体杂乱排列，从统计的角度观察，金属材料仍然展现出各向同性性质。

（4）小变形假设　认为构件发生的变形与构件的最小几何尺度相比很小可以忽略。由于绝大多数工程构件的变形比构件的最小几何尺寸要小得多，以至于在分析构件所受外力时，通常不考虑变形的影响，而仍可以用变形前的尺寸，此即所谓“原始尺寸原理”。如图 1-1 所示桥式起重机主架，变形后发生的最大垂直位移一般仅为跨度 l 的 1/1500～1/700，在求解两端支座的支承约束力时，忽略这些微小变形的影响。

1.3 外力及其分类

外力是外部物体对构件的作用力，包括外加载荷和约束力。

1. 体积力和表面力

（1）体积力　连续分布于物体内部各点上的力，如物体的自重和惯性力。

（2）表面力　作用于物体表面上的力，又可分为分布力和集中力。分布力是连续作用于物体表面的力，如作用于船体上的水压力等；集中力是作用于一点的力，如火车轮对钢轨的压力等。

2. 静载荷和动载荷

（1）静载荷　载荷缓慢地由零增加到某一定值后，不再随时间变化，保持不变或变动很不显著，称为静载荷。

（2）动载荷　载荷随时间而变化。动载荷可分为构件具有较大加速度、交变载荷和冲击载荷三种情况。

1.4 内力、截面法和应力的概念

1. 内力

由于构件变形，其内部各部分材料之间因相对位置发生改变，从而引起相邻部分材料间因力图恢复原有形状而产生的相互作用力，称为内力。注意：材料力学中的内力，是指外力作用下材料反抗变形而引起的内力的变化量，也就是“附加内力”，它与构件所受外力密切相关。

2. 截面法

假想用截面把构件分成两部分，以显示并确定内力的方法称为截面法。如图 1-5 所示，①截面的两侧必定出现大小相等、方向相反的内力；②被假想截开的任一部分上的内力必定与外力相平衡。

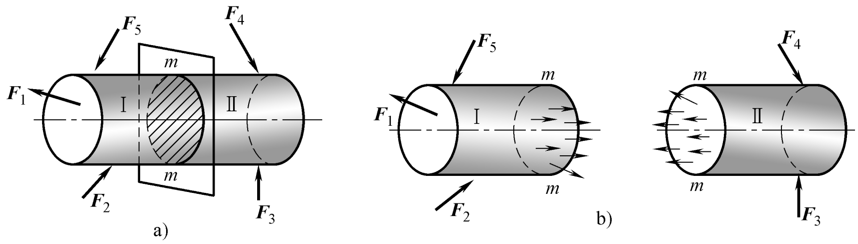


图 1-5　截面法

例 1-1　试求图 1-6 所示杆件中特定截面Ⅰ—Ⅰ和Ⅱ—Ⅱ上的内力分量，并指出相应杆件的变形形式。

解：（1）用Ⅰ—Ⅰ截取研究对象如图 1-7a 所示，*BC* 段截面上有轴向内力，先设 $\boldsymbol{F}_{N_{\mathrm{I}}}$ 为拉力，由静力平衡条件得

$$\sum F_x=0,F_{N_{\mathrm{I}}}-F=0$$

$$F_{N_{\mathrm{I}}}=F$$

这就是 *BC* 段内任一横截面上的内力。

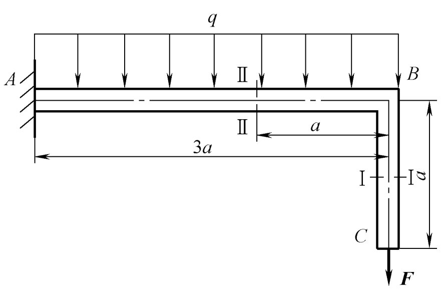


图 1-6　用截面法求杆件内力

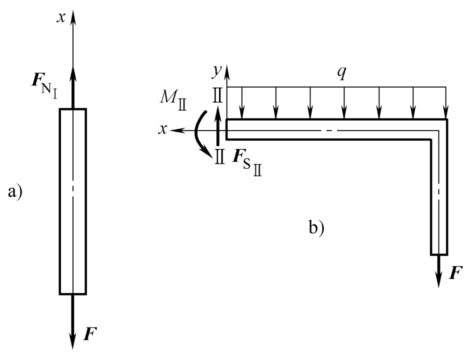


图 1-7　两个截面上杆件的内力

（2）再在 *AB* 段内的任意处以横截面Ⅱ—Ⅱ将杆截开，假定取右段为研究对象。*AB* 段截面上有剪切内力 $\boldsymbol{F}_{S_{\mathrm{II}}}$ 与内力偶 M_{II}，假设它们的作用方向如图 1-7b 所示。根据静力平衡条件

$$\sum F_y=0,\quad F_{S_{\mathrm{II}}}-F-qa=0$$

求得

$$F_{S_{\mathrm{II}}}=P+qa$$

对截面Ⅱ—Ⅱ，力矩平衡条件为

$$\sum M=0,\quad M_{\mathrm{II}}-Fa-\frac{qa^2}{2}=0$$

求得

$$M_{\mathrm{II}}=Fa+\frac{qa^2}{2}$$

这就是 *AB* 段内任一横截面上的内力。

讨论：1）用截面求指定截面内力时，做截面之前外力不得随意做静力等效处理，如求Ⅱ—Ⅱ截面内力时，不能先将均布载荷处理成集中力 $3qa$（图 1-8）。在做Ⅱ—Ⅱ截面并选取研究对象后，可以将选定部分的均布载荷处理成集中力（如取右段为研究对象，等效集中力为 qa），以便表示力矩平衡条件。

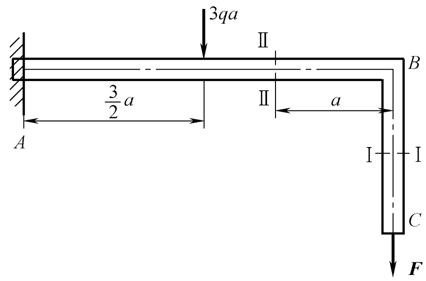


图 1-8　均布载荷不可用等值集中力代替

2）用截面法求指定截面内力时，研究对象可取两部分中任一部分，如例 1-1 中，求Ⅱ—Ⅱ截面上内力可取Ⅱ—Ⅱ截面左侧，也可取右侧部分物体，此时求得的内力应符合大小相等、方向相反的规律，因此可用于校核，读者可以试取Ⅱ—Ⅱ截面左侧部分物体为研究对象进行校核。

3. 应力

参照图 1-9，围绕 K 点取微小面积 ΔA。根据均匀连续假设，ΔA 上必存在分布内力，设它的合力为 $\Delta \boldsymbol{F}$，$\Delta \boldsymbol{F}$ 与 ΔA 的比值为

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}=\frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta A}$$

$\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}$ 是一个矢量，代表在 ΔA 范围内，单位面积上的内力的平均集度，称为平均应力。当 ΔA 趋于零时，$\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}$ 的大小和方向都将趋于一定极限，得到

$$\boldsymbol{p}=\lim_{\Delta A\to 0}\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta A}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}A}$$

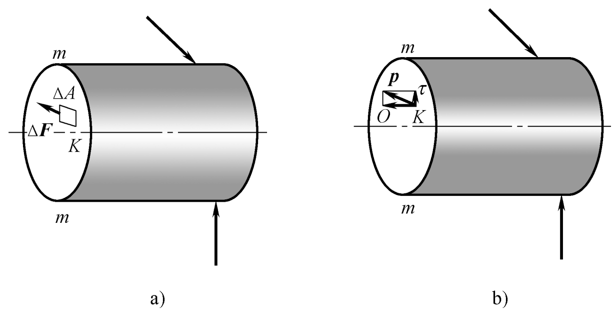


图 1-9　应力的概念

$\boldsymbol{p}$ 称为 K 点处的（全）应力，它是一个矢量。通常把应力 $\boldsymbol{p}$ 向垂直于截面的法线方向和平行于截面的切线方向做投影，分别得到法向投影 σ 和切向投影 τ。σ 称为正应力，τ 称为切应力。应力 σ 和 τ 均为标量，表示单位面积上的内力，也即表示微分截面积 $\Delta A\to 0$ 处内力的密集程度。应力的国际单位为 N/m^2，且 $1N/m^2=1Pa$（帕斯卡）。材料力学中多用 $MPa=10^6Pa$ 和 $GPa=10^9Pa$ 的单位。在工程上，也用 $kg(f)/cm^2$ 为应力单位，它与国际单位的换算关系为 $1kg(f)/cm^2=0.1MPa$。**由于材料力学主要研究力、应力、力矩等矢量的大小，以后如无特别说明，这些矢量均不使用黑体。**

1.5 应变的概念

对于构件上任“一点”材料的变形，只有线变形和角变形两种基本变形，它们分别由线应变和角应变来量度。

1. 线应变 ε

通常用正微六面体（下称微单元体）来代表构件上某“一点”。如图 1-10 所示，微单元体的棱边边长为 Δx、Δy、Δz，变形后其边长和棱边的夹角都发生了变化。变形前平行于 x 轴的线段 MN 原长为 Δx，变形后 M 和 N 分别移到 M'和 N'，$M'N'$的长度为 $\Delta x+\Delta u$，这里

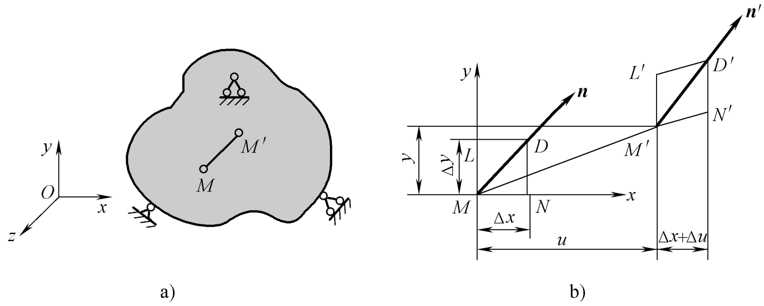


图 1-10　应变的概念

$$\Delta u = \overline{M'N'} - \overline{MN}$$

于是

$$\varepsilon_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

表示线段 MN 每单位长度的平均伸长或缩短，称为平均线应变，若使$\overline{MN}$趋近于零，则有一点线应变

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

称为 M 点沿 x 方向的线应变或正应变。线应变即为单位长度上的变形量，为无量纲量，其物理意义是构件上一点沿某一方向线变形量的大小。

2. 角应变 γ

如图 1-10b 所示，正交线段 MN 和 ML 经变形后，分别是 $M'N'$和 $M'L'$。变形前后其角度的变化是（$\pi/2-\angle L'M'N'$），当 N 和 L 趋近于 M 时，上述角度变化的极限值是

$$\gamma = \lim_{\substack{\overline{MN} \to 0 \\ \overline{ML} \to 0}} \left(\frac{\pi}{2} - \angle L'M'N' \right)$$

称为 M 点在 x-y 平面内的切应变或角应变。切应变表示微立方单元体两棱角直角的改变量，为无量纲量，单位为 rad。

例 1-2　图 1-11 所示为一矩形截面薄板受均布力 q 作用，已知边长 $l=400\text{mm}$，受力后沿 x 方向均匀伸长 $\Delta l=0.05\text{mm}$。试求板中 a 点沿 x 方向的正应变。

解： 由于矩形截面薄板沿 x 方向均匀受力，可认为板内各点沿 x 方向具有正应力与正应变，且处处相同，所以平均应变即 a 点沿 x 方向的正应变。

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0.05}{400} = 125 \times 10^{-6}$$

例 1-3　图 1-12 所示为一嵌于四连杆机构内的薄方板，$b=250\text{mm}$。若在力 $\boldsymbol{F}$ 作用下 CD 杆下移 $\Delta b=0.025$，试求薄板中 a 点的切应变。

解： 由于薄方板变形受四连杆机构的制约，可认为板中各点均产生切应变，且处处

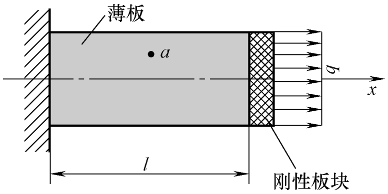


图 1-11　矩形板受均布拉力

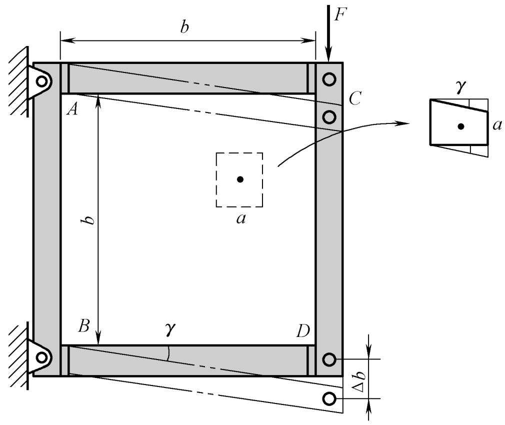


图 1-12　方板发生切应变

相同。

$$\gamma_a = \gamma_m = \frac{\Delta b}{b} = \frac{0.025}{250} = 100\times 10^{-6}$$

1.6 杆件的基本变形形式

杆件受力有各种情况，相应的变形就有各种形式，在工程结构中，杆件的基本变形只有以下四种：

（1）轴向拉伸和压缩　变形形式是由大小相等、方向相反、作用线与杆件轴线重合的一对力引起的，表现为杆件长度的伸长或缩短。如托架的拉杆和压杆受力后的变形（见图 1-13）。

（2）剪切　变形形式是由大小相等、方向相反、相互平行的一对力引起的，表现为受剪杆件的两部分沿外力作用方向发生相对错动。如连接件中的螺栓和销钉受力后的变形（见图 1-14）。

（3）扭转　变形形式是由大小相等、转向相反、作用面都垂直于杆轴的一对力偶引起的，表现为杆件的任意两个横截面发生绕轴线的相对转动。如机器中的传动轴受力后的变形（见图 1-15）。

（4）弯曲　变形形式是由垂直于杆件轴线的横向力，或由作用于包含杆轴的纵向平面内的一对大小相等、方向相反的力偶引起的，表现为杆件轴线由直线变为受力平面内的曲线。如单梁起重机的横梁受力后的变形（见图 1-16）。

杆件同时发生几种基本变形，称为组合变形

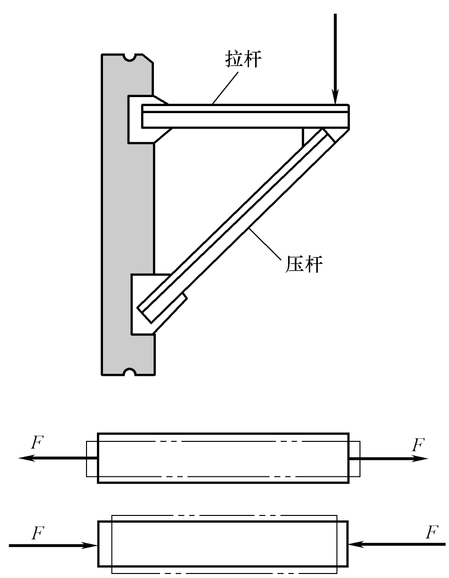


图 1-13　轴向拉伸和压缩

(见图 1-17)。

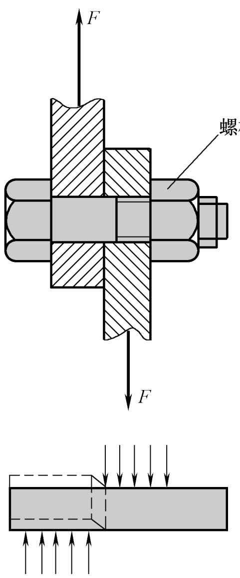


图 1-14　剪切

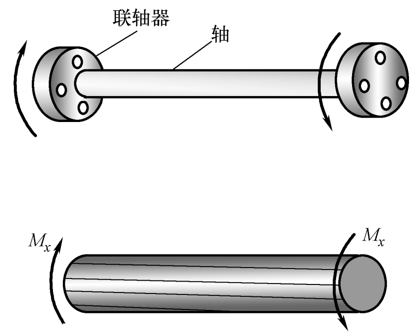


图 1-15　扭转

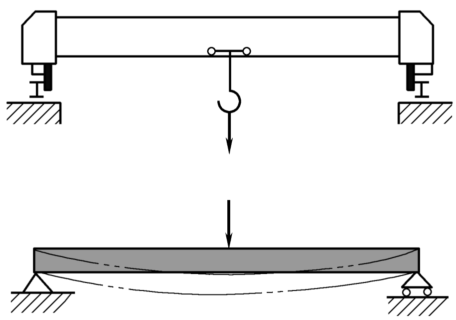


图 1-16　弯曲

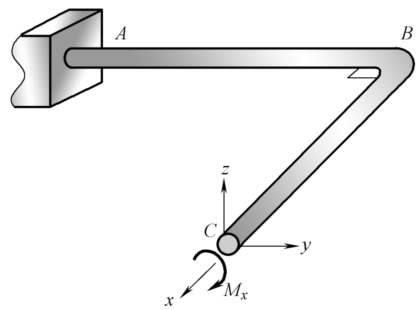


图 1-17　组合变形

本章小结

1. 材料力学研究的问题是构件的强度、刚度和稳定性。

2. 构成构件的材料是可变形固体。

3. 对材料所做的基本假设是：均匀性假设、连续性假设、各向同性假设及小变形假设。

4. 材料力学研究的构件主要是杆件，且是小变形杆件。

5. 内力是指在外力作用下，物体内部各部分之间的相互作用；显示和确定内力可用截面法；应力是单位面积上的内力。点应力可用正应力与切应力表示。

6. 对于构件任一点的变形，只有线变形和角变形两种基本变形。

7. 杆件的四种基本变形形式是：拉伸（或压缩）、剪切、扭转以及弯曲。

思　考　题

1-1　构件的内力与应力有何区别与联系？压强与应力有何区别与联系？

1-2　材料力学中涉及的内力有哪些？通常求解内力的方法是什么？

1-3　试说出构件的强度、刚度与稳定性的定义。工程设计中保证构件安全工作的基本要求是什么？

1-4　当构件的尺度为微米时，材料力学的基本假设哪些不成立？

1-5　什么叫作原始尺寸原理？在什么情况下可以使用原始尺寸原理？

1-6　杆件的基本变形形式有几种？试各举一例。

1-7　判断以下论述的正误：

（1）材料力学研究的主要问题是微小弹性变形问题，因此研究构件的平衡与运动时，可不计构件的变形。

（2）载荷作用下，构件截面上某点处分布内力的集度，称为该点的应力。

（3）线应变和角应变均为无量纲量。

（4）材料力学的基本假设有：均匀性假设、连续性假设、各向同性假设、线弹性假设及小变形假设。

习　题

1-1　钻床如图 1-18 所示，在载荷 F 作用下，试确定截面 m—m 和 n—n 上的内力。

1-2　试求图 1-19 所示结构 m—m 和 n—n 两截面上的内力，并指出 AB 和 BC 两杆的变形属于何类基本变形。

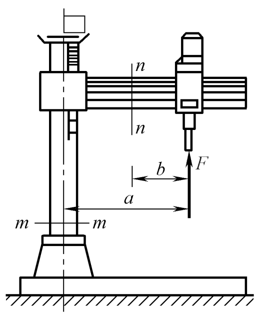


图 1-18　题 1-1 图

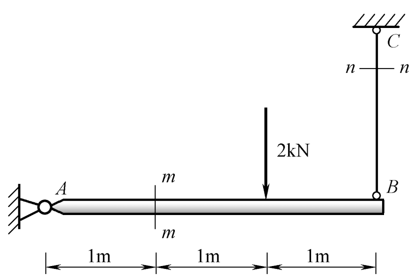


图 1-19　题 1-2 图

1-3　拉伸试样上 A、B 两点的距离称为 l 标距，如图 1-20 所示。受拉力作用后，用变形仪量出两点距离的增量为 $\Delta l=5\times10^{-2}$mm。若 l 的原长为 $l=100$mm，试求 A、B 两点间的平均应变 ε_m。

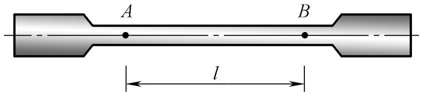


图 1-20　题 1-3 图

1-4　轴向拉压杆系结构，杆 AB 为直径 $d=50$mm 的圆截面钢杆；杆 AC 由两根 5 号等边角钢构成，如图 1-21 所示。不计杆的自重，$\alpha=20°$，$F=50$kN。力沿杆的轴线。试求各杆横截面上的内力。

1-5　图 1-22 所示矩形截面直杆，右端固定，左端在杆的对称平面内作用有逆时针方向的集中力偶 M，

试根据弹性体的特点分析固定端截面 A—A 上的内力分布特点。

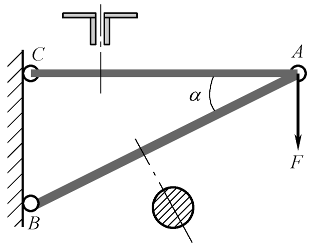


图 1-21 题 1-4 图

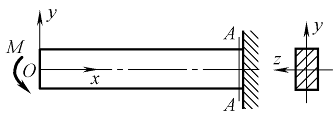


图 1-22 题 1-5 图

第 2 章

轴向拉伸、压缩与剪切

内容梗概：轴向拉伸、压缩要求外力的合力通过杆件的轴线。截面法是材料力学中由外力求内力的基本方法。表现轴力变化的图形称为轴力图。绘制出轴力图后再分析杆件横截面上的正应力及杆件的线变形和线应变，最后通过强度条件和刚度条件解决工程实际问题——强度或刚度的校核，设计截面，确定容许载荷。拉（压）平面假设：变形前原为平面的横截面，变形后仍保持为平面，而且仍垂直于杆的轴线，只是相对位置有微小平移。强度计算的基本思路是寻找构件内的危险点（应力最大点）。对于等截面杆，一般画出轴力图后即可找出最大轴力并进行校核强度。对于变截面杆，要兼顾最大轴力和最小横截面面积，通过比较确定危险点。

材料的力学性能通过一系列参数表征，这些参数必须通过试验方法测试得到。其中最主要和最基本的试验就是拉（压）试验。低碳钢的拉伸应力-应变曲线表现了弹性阶段、屈服阶段、强化阶段和变形局部化阶段。可以获得比例极限、弹性极限、屈服极限、强度极限以及弹性模量、伸长率、断面收缩率等力学指标。

拉压超静定问题的特点是约束力的个数多于静力平衡方程的数目。因此约束力不能单凭静力平衡条件来求得，而必须考虑杆件在外力和多余约束力产生的弹性变形，给出变形协调条件并求解方程。

剪切和挤压破坏是结构连接件受外力作用发生失效的基本形式。工程计算中假设剪切面和挤压面上的内力均匀分布，得到简单的计算公式以解决工程中连接件的剪切和挤压强度校核问题。

2.1 轴向拉伸与压缩杆件及实例

轴向拉伸和压缩的杆件在生产实际中经常遇到，虽然杆件的外形各有差异，加载方式也不同，但一般对受轴向拉伸与压缩的杆件的形状和受力情况进行简化，计算简图如图 2-1 所示。轴向拉伸是在轴向力作用下，杆件产生伸长变形，也简称拉伸；轴向压缩是在轴向力作用下，杆件产生缩短变形，也简称压缩。

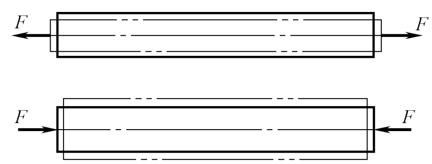


图 2-1　轴向位伸和压缩

实例如图 2-2 所示用于连接螺栓的简化图；如图 2-3 所示结构桁架中的拉杆和压杆；如图 2-4 所示汽车式起重机的支腿。通过上述实例得知轴向拉伸和压缩具有如下特点：

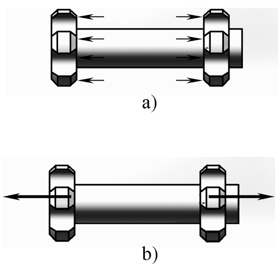


图 2-2　轴向拉伸构件

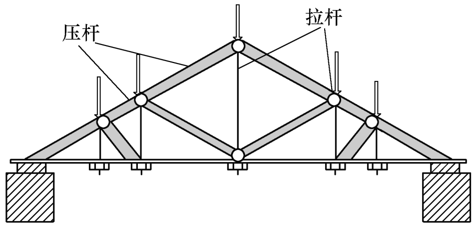


图 2-3　轴向拉伸构件

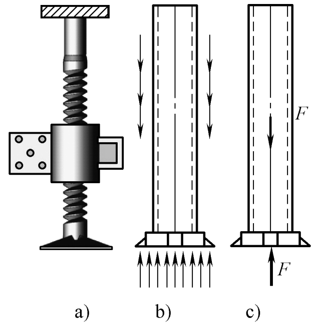


图 2-4　轴向拉伸构件

1）受力特点：作用于杆件两端的外力大小相等、方向相反、作用线与杆件轴线重合，即称轴向力。

2）变形特点：杆件变形是沿轴线方向的伸长或缩短。

2.2 横截面上的内力和应力

1. 轴向拉、压杆的内力

在图 2-5 所示受轴向拉力 F 的杆件上做任一横截面 $m—m$，取左段部分，并以内力的合力 F_N 代替右段对左段的作用力。由平衡条件 $\sum F_x=0$，得

$$F_N-F=0$$

由于 $F>0$（拉力），则

$$F_N=F>0$$

合力 F 的方向正确。因而当外力沿着杆件的轴线作用时，杆件截面上只有一个与轴线重合的内力分量，该内力（分量）称为轴力，一般用 F_N 表示。若取右段部分，同理 $\sum F_x=0$，知

$$F-F_N=0$$

得

$$F_N=F>0$$

图中 F_N 的方向也是正确的。

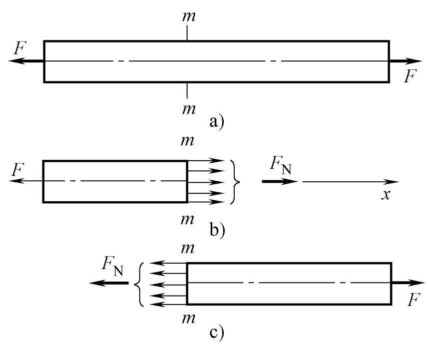


图 2-5　内力图

材料力学中轴力的符号是由杆件的变形决定的，而不是由平衡坐标方程决定的。习惯上将轴力 F_N 的正负号规定为：拉伸时，轴力 F_N 为正；压缩时，轴力 F_N 为负。

2. 轴力图

一般而言，在复杂外力作用下，在杆的不同截面上轴力是不同的，可以用函数 $F_N=F_N(x)$ 来表示。轴力图可用图线表示轴力函数 $F_N=F_N(x)$ 沿轴线变化的规律。该图一般以杆轴线为横坐标表示截面位置，纵轴表示轴力大小。这种方法对于土木工程尤为重要，建筑工程师可以借助于轴力图，迅速了解哪些杆件受拉力，哪些杆件受压力，以便进行相应的强度和稳定性设计和计算。

例 2-1　求如图 2-6a 所示杆件的内力，并做轴力图。

解：（1）计算各段内力

AC 段：作截面 1—1，取左段部分（见图 2-6b）。由 $\sum F_x=0$ 得

$$F_{N1}=5\text{kN}\quad（拉力）$$

CB 段：作截面 2—2，取左段部分（见图 2-6c），并假设 F_{N_2} 方向如图所示。由 $\sum F_x=0$ 得

$$F_{N2}+15\text{kN}-5\text{kN}=0$$

则

$$F_{N2}=-10\text{kN}\quad（压力）$$

F_{N2}的方向应与图中所示方向相反。

（2）绘轴力图

选截面位置为横坐标；相应截面上的轴力为纵坐标，根据适当比例，绘出图线。由图 2-6d可知 CB 段的轴力值最大，即 $|F_N|_{max}=10\text{kN}$。

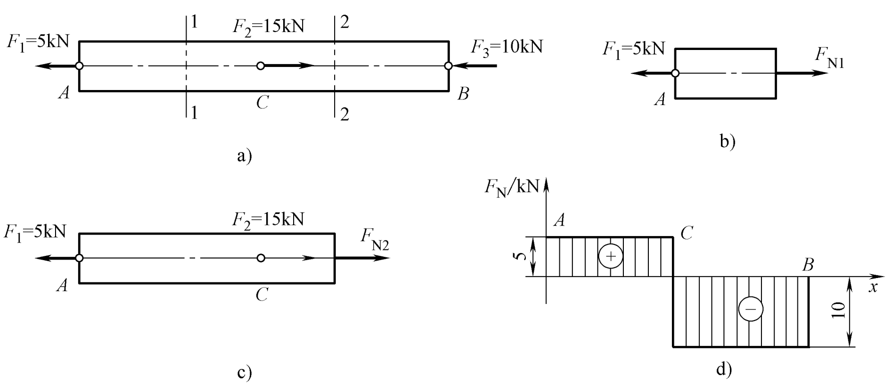


图　2-6

注意两个问题：1）求内力时，外力不能沿作用线随意移动（即：不可以使用力的可传性原理和力的平移定理）。因为材料力学中研究的对象是变形体，不是刚体，力的可传性原理的应用是有条件的。

2）截面不能刚好截在外力作用点处（如通过 C 点），因为就数学意义而言，该点是函数奇点，函数 $F_N=F_N(x)$ 在此点处无定义。

3. 轴向拉（压）杆横截面上的应力

只根据轴力并不能判断杆件是否有足够的强度，因此必须用横截面上的应力来度量杆件单位面积上的受力程度。为了求得应力分布规律，在材料力学的体系中采用先研究杆件变形，找出变形规律，为此提出平面假设。然后得到应力分布规律的方法论。

平面假设：变形之前横截面为平面，变形之后仍保持为平面，而且仍垂直于杆轴线，如图 2-7 所示。

根据平面假设我们可以假设一根等截面杆是由无数长度和截面相等的纵向纤维组成

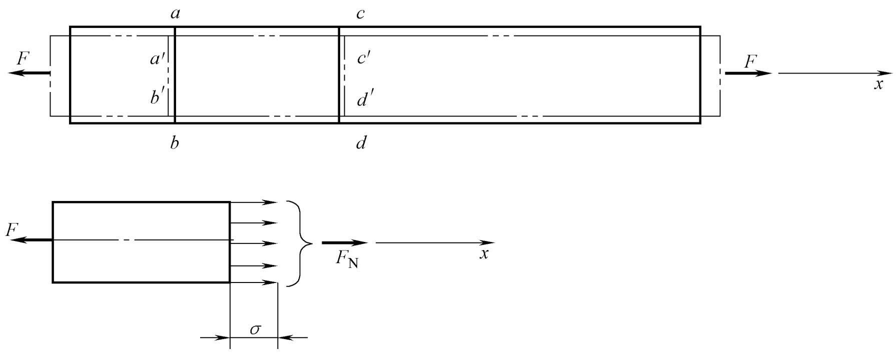


图 2-7　平面假设

(类似竹子的结构)。受力变形时，在横截面上各纤维伸长量相同，它们沿轴向的正应变相同，各纤维所受力必然相等。由此可推知在横截面上各点单位面积上的力相等，即正应力 σ 等于常量。但是在不同的截面上，正应力 σ 可以不同，可以表示为 $\sigma=\sigma(x)$。然后，由静力平衡条件确定 $\sigma(x)$ 的大小。

由于 $\mathrm{d}F_N=\sigma(x)\cdot \mathrm{d}A$，且在横截面上正应力 $\sigma(x)$ 等于常量与积分无关，所以积分得

$$F_N=\int_A \sigma(x)\,\mathrm{d}A=\sigma(x)A$$

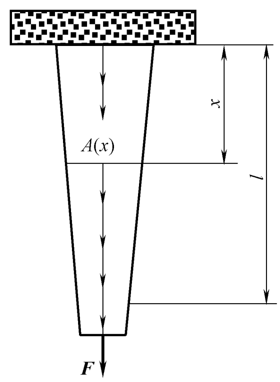


图 2-8　变截面上的应力

则

$$\sigma=\frac{F_N(x)}{A} \tag{2-1}$$

式中　$\sigma(x)$为在杆的纵坐标 x 处的横截面上的正应力；$F_N(x)$ 为横截面上的轴力；A 为横截面面积。正应力 σ 的正负号规定为：拉应力为正，压应力为负。对于斜度不大的变截面直杆 (见图 2-8)，在计算正应力时，将横截面面积表示为杆的纵坐标 x 的函数 $A=A(x)$，也可近似应用式 (2-1)：

$$\sigma=\frac{F_N(x)}{A(x)} \tag{2-2}$$

在考虑杆自重 (容重 γ) 引起的正应力时，$F_N(x)=F+\gamma A(x)\cdot x$。对于等截面直杆，由式 (2-1) 知最大正应力发生在最大轴力处，此处最易破坏。而对于变截面直杆，最大正应力的大小不但要考虑 $F_N(x)$，同时还要考虑 $A(x)$。

4. 圣维南原理

必须指出，实际构件两端并非直接作用着一对轴向力，而是作用着与两端加载方式有关的分布力，轴向力只是它们静力等效的内力的合力。如图 2-2、图 2-4 中的轴向力是通过螺齿作用呈轴对轴分布的分布力的合力。圣维南原理指出：如果将作用于构件上某一小区域内的外力系 (外力大小不超过一定值) 用一静力等效力系来代替，则这种代替对构件内应力与应变的影响只限于离原受力小区域很近的范围内。对于杆件，此范围相当于横向尺寸的 1~1.5 倍。

例 2-2　旋转式起重机的三角架如图 2-9 所示，已知 AB 杆由 2 根截面面积为 10.86cm^2

的角钢制成，$F=130\text{kN}$，$\alpha=30°$。求 AB 杆横截面上的应力。

解：（1）计算 AB 杆内力

取结点 A 为研究对象，由平衡条件 $\sum F_y=0$，$F_{AB}\sin30°-F=0$

则

$$F_{AB}=2F=260\text{kN}\quad（拉力）$$

（2）计算 AB 杆应力

$$\sigma_{AB}=\frac{F_{AB}}{A}=\frac{260\times10^3\text{N}}{10.86\times2\times10^{-4}\text{m}^2}=119.7\text{MPa}$$

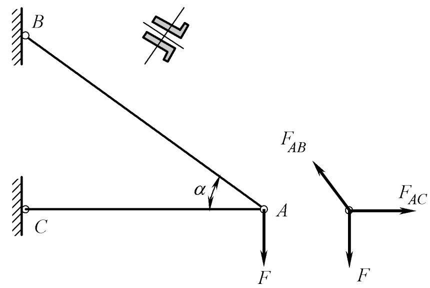


图　2-9

例 2-3　起吊钢索如图 2-10 所示，截面积分别为 $A_1=3\text{cm}^2$，$A_2=4\text{cm}^2$，$l_1=l_2=50\text{m}$，$F=12\text{kN}$，材料单位体积重量 $\gamma=0.028\text{N/cm}^3$。试考虑自重绘制轴力图，并求 $\sigma_{\max}$。

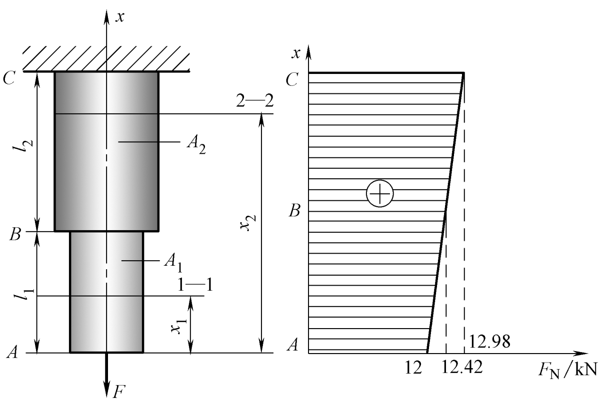
解：（1）计算轴力

AB 段：取 1—1 截面

$$F_{N1}=F+\gamma A_1x_1\qquad(0\leqslant x_1\leqslant l_1)\tag{a}$$

BC 段：取 2—2 截面

$$F_{N2}=F+\gamma A_1l_1+\gamma A_2(x_2-l_1)\qquad(l_1\leqslant x_2\leqslant l_1+l_2)\tag{b}$$



a)　　b)

图　2-10

（2）绘轴力图

当 $x_1=0$ 时，

$$F_{NA}=F=12\text{kN}\quad（拉力）$$

当 $x_1=l_1$ 时，

$$\begin{aligned}F_{NB}&=F+\gamma A_1l_1+\gamma A_2(l_1-l_1)\\&=12.42\text{kN}\qquad（拉力）\end{aligned}$$

当 $x_2=l_1+l_2$ 时，

$$F_{NC}=F+\gamma A_1l_1+\gamma A_2l_2=12.98\text{kN}\qquad（拉力）$$

轴力图如图 2-10b 所示。

（3）应力计算

B 截面：$$\sigma_B=\frac{F_{NB}}{A_1}=\frac{12.42\times10^3\text{N}}{3\times10^{-4}\text{m}^2}=41.4\text{MPa}\quad（拉应力）$$

C 截面：$$\sigma_C=\frac{F_{NC}}{A_2}=\frac{12.98\times10^3\text{N}}{4\times10^{-4}\text{m}^2}=36.8\text{MPa}\quad（拉应力）$$

比较 σ_B、σ_C 的大小，得 $\sigma_{max}=41.4\text{MPa}$

---

5. 斜截面上的应力

试验现象表明，有时轴向拉（压）杆件沿斜截面发生破坏，此时该如何确定斜截面 k—k 上的应力呢？设等直杆的轴向拉力为 F（见图 2-11），横截面面积为 A，由于 k—k 截面上的内力仍为

$$F_\alpha=F$$

而且由斜截面上沿 x 方向伸长变形仍均匀分布可知，斜截面上应力 p_α 仍均匀分布。若以 p_α 表示斜截面 k—k 上的应力，于是有

$$p_\alpha=\frac{F_\alpha}{A_\alpha}$$

而 $A_\alpha=\dfrac{A}{\cos\alpha}$，所以

$$p_\alpha=\frac{F}{A}\cos\alpha=\sigma\cos\alpha$$

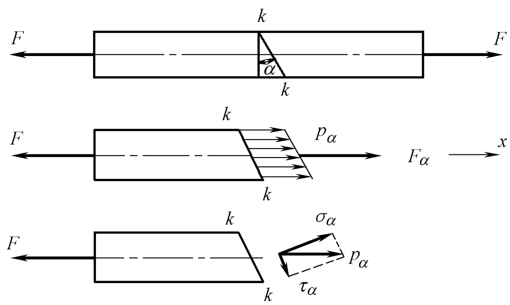


图 2-11　斜截面上的应力

则将斜截面上全应力 p_α 分解成正应力 σ_α 和切应力 τ_α，有

$$\sigma_\alpha=p_\alpha\cos\alpha=\sigma\cos^2\alpha \tag{2-3}$$

$$\tau_\alpha=p_\alpha\sin\alpha=\frac{\sigma}{2}\sin2\alpha \tag{2-4}$$

α、σ_α、τ_α 正负号分别规定为：

α——自 x 轴逆时针转向斜截面外法线 n，α 为正；反之为负；

σ_α——拉应力时为正，压应力时为负；

τ_α——取保留截面内任一点为矩心，当 τ_α 对矩心顺时针转动时为正，反之为负。

讨论式（2-3）和式（2-4）：

1）当 $\alpha=0$ 时，横截面 $\sigma_{\alpha max}=\sigma$，$\tau_\alpha=0$；

2）当 $\alpha=+45°$时，斜截面 $\sigma_\alpha=\dfrac{\sigma}{2}$，$\tau_{\alpha max}=\dfrac{\sigma}{2}$；

3）当 $\alpha=90°$时，纵向截面 $\sigma_\alpha=0$，$\tau_\alpha=0$。

结论：对于轴向拉（压）杆，$\sigma_{max}=\sigma$，发生在横截面上；$\tau_{max}=\dfrac{\sigma}{2}$，发生在沿顺时针转45°角的斜截面上。同样大小的切应力也发生在 $\alpha=-45°$的斜面上。

例 2-4　木立柱承受压力 F，上面放有钢块。如图 2-12 所示，钢块截面积 A_1 为 2×

$2cm^2$，$\sigma_{钢}=35MPa$，木柱截面积 $A_2=8\times8cm^2$，求木柱顺纹方向切应力的大小及指向。

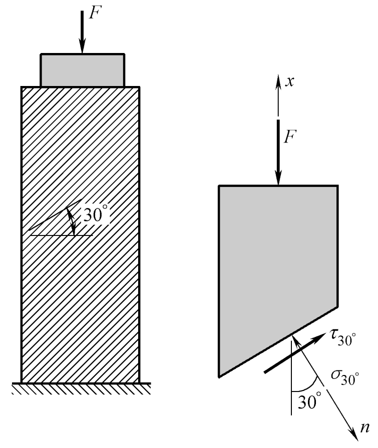


图　2-12

解：(1) 计算木柱压力 F，由

$$\sigma_{钢}=\frac{F}{A_1}$$

所以 $F=\sigma_{钢}\cdot A_1=(35\times10^6Pa)\times(2\times2\times10^{-4}m^2)=$ 14kN（压力）

(2) 计算木柱的切应力 $\tau_{30°}$。

横截面上

$$\sigma=\frac{F}{A_2}=\frac{14\times10^3N}{64\times10^{-4}m^2}=2.19MPa\quad（压应力）$$

则

$$\tau_{30°}=\frac{\sigma}{2}\sin(2\times30°)=0.95MPa$$

$\tau_{30°}$指向如图所示。

2.3　材料拉伸时的力学性能

材料在外力作用下所表现出的变形和破坏方面的特性，称为材料的力学性能。材料的力学性能通常都是通过试验来认识的，最基本的试验是材料的轴向拉伸和压缩试验。常温、静载下的轴向拉伸试验是材料力学中最基本、应用最广泛的试验。通过拉伸试验，可以较全面地测定材料的力学性能指标，如弹性、塑性、强度、断裂等。这些性能指标对材料力学的分析计算、工程设计、选择材料和新材料开发有极其重要的作用，特别对建立复杂应力状态下材料的失效准则提供最基本的依据。由于有些材料在拉伸和压缩时所表现的力学性能并不相同，因而必须通过另一基本试验，轴向压缩试验来了解材料压缩时的力学性能。

1. 试件和设备

试验时首先要把待测试的材料加工成试件，试件的形状、加工精度和试验条件等都有具体的国家标准或部颁标准规定。

标准试件：圆截面试件，如图 2-13 所示，初始标距 l_0 与直径 d_0 的比例分为 $l_0=10d_0$（称为长标距试件），$l_0=5d_0$（称为短标距试件）。板试件（矩形截面）：标距 l_0 与横截面面积 A_0 的比例分为 $l_0=11.3\sqrt{A_0}$，$l_0=5.65\sqrt{A_0}$。金属材料的压缩试验，一般采用短圆柱形试件，其高度为直径的 1.5～3 倍（见图 2-13c）。

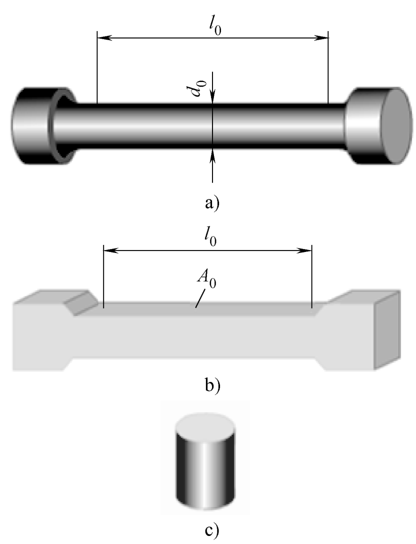


图 2-13　不同材料的拉伸和压缩试件

试验设备主要是拉力机或万能材料试验机、控制计算机、引伸计、记录仪器等。详细介绍见材料力学试验规范，如国家标准《金属拉伸试验方法》（如 GB/T 228—2002）详细规定了试验条件、试验内容及方法等。

2. 低碳钢拉伸时的力学性能

低碳钢是指含碳量在 0.3%以下的碳素钢。

（1）拉伸图　如图 2-14 所示，以伸长量 Δl 为横轴，以轴向载荷 F 为纵轴，可以绘制材料拉伸变形各阶段的轮廓特征：弹性阶段（oa）、屈服（流动）阶段（bc）、强化阶段（ce）和变形局部化阶段（ef）。由于 F-Δl 曲线与试件的尺寸有关，为了消除试件尺寸的影响，可采用应力-应变曲线来代替拉伸图。

（2）应力-应变（σ-ε）曲线图　如图 2-15 所示，以名义应力 $\sigma=F/A_0$ 取代轴向载荷 F，以工程应变 $\varepsilon=\Delta l/l_0$ 取代伸长量 Δl。应力-应变曲线仍然具有四个阶段。其各特征点的含义为：

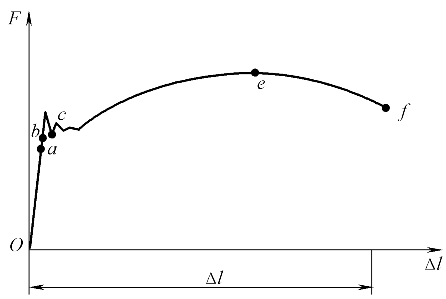


图 2-14　拉伸图

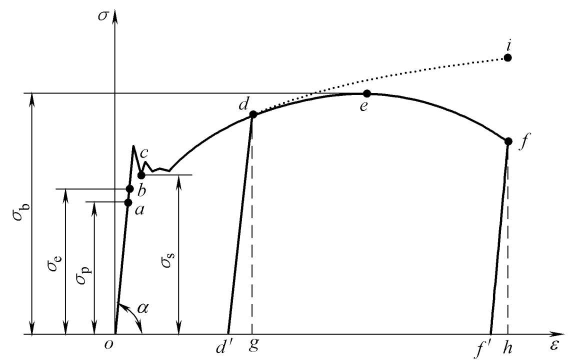


图 2-15　应力-应变曲线

$o \sim a$ 段：在拉伸（或压缩）的初始阶段应力 σ 与应变 ε 为直线关系直至 a 点，此时 a 点所对应的应力值称为比例极限，用 σ_p 表示。它是应力与应变成正比例的最大极限。当 $\sigma \leqslant \sigma_p$ 时则有

$$\sigma=E\varepsilon \tag{2-5}$$

即胡克定律，它表示应力与应变成正比。因此有：$E=\sigma/\varepsilon=\tan\alpha$，其中 E 称为弹性模量或者杨氏模量，单位与 σ 相同。当应力超过比例极限增加到 b 点时，σ-ε 关系偏离直线，此时若将应力卸至零，则应变随之消失（一旦应力超过 b 点，卸载后，有一部分应变不能消除），此 b 点的应力定义为弹性极限 σ_e。σ_e 是材料只出现弹性变形的极限值。

$b \sim c$ 段：应力超过弹性极限后继续加载，会出现一种现象，即应力增加很少或不增加，应变会很快增加，这种现象叫作屈服。开始发生屈服的点所对应的应力叫作屈服极限 σ_s。又称屈服强度。在屈服阶段应力不变而应变不断增加，材料似乎失去了抵抗变形的能力，因此产生了显著的塑性变形（此时若卸载，应变不会完全消失，而存在残余变形）。所以 σ_s 是衡量材料强度的重要指标。

表面磨光的低碳钢试样屈服时，表面将出现与轴线成 45°倾角的条纹，这是由于材料内部晶格相对滑移形成的，称为滑移线，如图 2-16 所示。

$c \sim e$ 段：越过屈服阶段后，如要让试件继续变形，必须继续加载，材料似乎强化了，ce

段即强化阶段。应变强化阶段的最高点（e 点）所对应的应力称为强度极限 σ_b。它表示材料所能承受的最大应力。

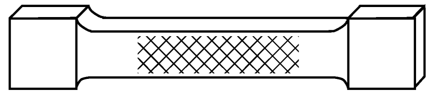


图 2-16　滑移线

e~f 段：过 e 点后，即应力达到强度极限后，试件局部发生剧烈收缩的现象，称为颈缩，如图 2-17 所示。进而试件内部出现裂纹，名义应力 σ 下跌，至 f 点试件断裂。

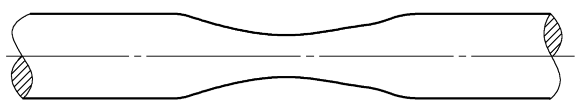


图 2-17　颈缩

对塑性较好的材料（如低碳钢）而言，σ_s、σ_b 是衡量材料强度的重要指标。应当指出，由于采用名义应力，没有考虑伸长变形过程伴随的横截面面积减小，强度极限 σ_b 只是名义上材料所能承受的最大应力并非材料内的真实最大应力。如果用试件断裂时的真实面积衡量，则真实最大应力为图 2-15 中的虚线 $d \sim i$ 段所对应 i 点的应力值。在工程实践中，基于简单、实用、安全的原因，仍采用 σ_b 表示材料所能承受的最大应力。但是，当用计算机模拟材料的非线性力学行为时，必须采用真应力-应变曲线。

（3）伸长率和断面收缩率　为度量材料塑性变形的能力，定义伸长率为

$$\delta=\frac{l_1-l}{l}\times100\%$$

式中，l 为试件标线间的标距；l_1 为试件断裂后量得的标线间的长度。

定义断面收缩率为

$$\psi=\frac{A-A_1}{A}\times100\%$$

式中，A 为试件原始横截面面积；A_1 为断裂后试件颈缩处面积。对于低碳钢：$\delta=20\%\sim30\%$，$\psi\approx50\%\sim60\%$。这两个值越大，说明材料塑性越好。工程上通常按伸长率的大小把材料分为两类：$\delta\geqslant5\%$——塑性材料；$\delta<5\%$——脆性材料。

（4）卸载规律及冷作硬化

1）卸载规律：试件加载到超过屈服极限后（见图 2-15 中 d 点）卸载，卸载线 $\overline{dd'}$ 大致平行于 $\overline{oa}$ 线，此时 $\overline{og}=\overline{od'}+\overline{d'g}=\varepsilon_p+\varepsilon_e$，其中 ε_e 为卸载过程中恢复的弹性应变，ε_p 为卸载后的塑性变形（残余变形），卸载至 d' 后若再加载，加载线仍沿 $d'd$ 线上升，因此加载的应力-应变关系符合胡克定律。

2）冷作硬化：上述材料进入强化阶段以后的卸载再加载历史（如经冷拉处理的钢筋），使材料此后的 σ-ε 关系沿 $d'def$ 路径，此时材料的比例极限和开始强化的应力提高了，而塑性变形能力降低了，这一现象称为冷作硬化。

3. 其他塑性材料拉伸时的力学性能

一些塑性材料的应力-应变曲线中没有明显的屈服阶段。对于没有明显“屈服平台”的塑性材料，通常人为地规定，把产生残余应变 $\varepsilon_p=0.2\%$ 时所对应的应力作为名义屈服点，并用 $\sigma_{0.2}$ 表示（见图 2-18）。通常对于没有明显屈服阶段的材料，手册中列出的 σ_s 即是指的名义屈服点 $\sigma_{0.2}$。

4. 铸铁拉伸时的力学性能

1）如图 2-19 所示灰口铸铁拉伸时的应力-应变关系，它只有一个强度指标 σ_b；且抗拉强度较低；

2）在断裂破坏前，几乎没有塑性变形；

3）σ-ε 关系近似服从胡克定律，并以割线的斜率作为弹性模量。

金属材料的压缩试件一般为短圆柱，其高度与直径之比为 $h/d=(1.5\sim3)$。

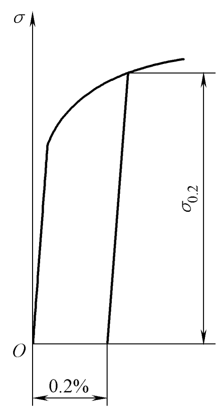


图 2-18　平移法求名义屈服应力

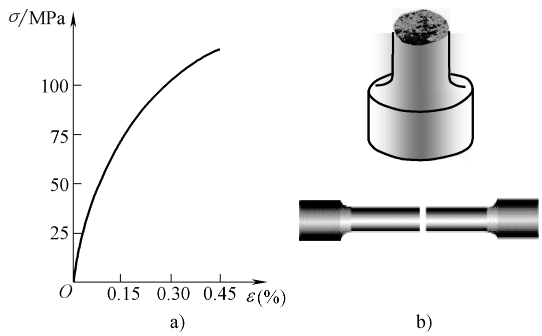


图 2-19　铸铁的拉伸

a）应力-应变曲线　b）破坏断口

2.4 材料压缩时的力学性能

1. 低碳钢压缩时的应力-应变曲线

应用于压缩试验的试件，金属材料一般加工制成短圆柱形式，而混凝土、石料等脆性材料一般加工制成立方体形状。详见国家标准《金属材料室温压缩试验方法》（GB/T 7314—2005）。压缩试验在压力试验机上进行。为了尽量减少摩擦力的影响，端面加工应有较高的表面粗糙度。试验时试件两端必须保证平行并与轴线垂直，使试件受轴向压力。低碳钢压缩时也会发生屈服，但并不像拉伸那样有明显的屈服阶段。因此，在测定屈服载荷 F_s 时要注意观察寻找屈服点。由于低碳钢受压时变形较大而不破裂，因此越压越扁导致横截面增大，其实际应力不随外载荷增加而增加，故不可能得到最大载荷 F_b，因此也得不到强度极限，所以在实验中是以变形来控制加载的。低碳钢压缩时的 σ-ε 曲线，如图 2-20 所示。观察图形可知，弹性模量 E 和屈服应力 σ_s 与拉伸时的大致相同。因越压越扁，得不到 σ_b。

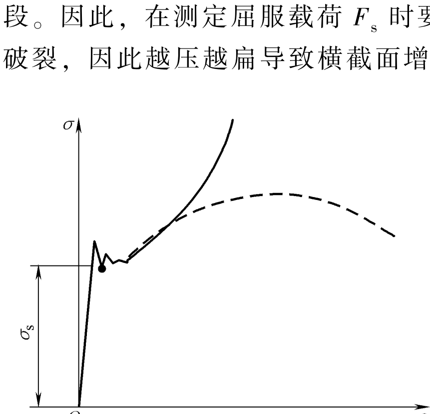


图 2-20　低碳钢压缩时的应力-应变曲线

2. 铸铁压缩时的应力-应变曲线

铸铁压缩时的 σ-ε 曲线，如图 2-21 所示。与塑性材料相反，脆性材料在压缩时的力学性质与拉伸时的有较大差别。铸铁在压缩时无论是强度极限

还是伸长率都比在拉伸时要大得多；曲线中直线部分很短；大致沿 45 的斜面发生剪切错动而破坏，说明铸铁的抗剪能力比抗压差。

注意到：①由于材料组织结构内含缺陷较多，铸铁的抗压强度极限与其抗拉强度极限均有较大分散度，但抗压强度极限$(\sigma_b)_c$大大高于抗拉强度极限$(\sigma_b)_t$，其关系大约为$\sigma_{bc}=(3\sim5)\sigma_{bt}$；②显示出一定程度的塑性变形特征，致使短柱试件断裂前呈现圆鼓形；③破坏时试件的断口沿与轴线大约成50°的斜面断开，为灰暗色平断口。

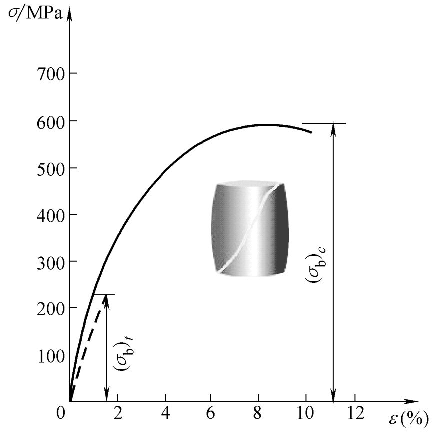


图 2-21　铸铁压缩时的应力-应变曲线

顺便指出，混凝土及石料等非金属脆性材料进行压缩试验时，常采用立方体形状的试件。这类材料受压破坏的形式与试件端面所受摩擦阻力有关。例如，压缩时若在端面涂以润滑剂，试件将沿纵向开裂，而不涂润滑剂时，压坏后将呈对接的截锥体形。两种情况下测得的抗压强度极限亦不相同。因此，对这类材料进行压缩试验时，除应注意采用规定的试件形状及尺寸外，还须注意端面的接触条件。

3. 几种常用材料的主要力学性能

各种材料均可通过拉伸试验测定其力学性能。表 2-1 给出了几种常用金属材料拉伸时的力学性能。关于材料更详尽的资料，可查阅有关国家标准、部颁标准或企业标准以及有关资料手册等。

表 2-1　几种常用材料的主要力学性能

材料名称	牌　号	屈服点 σ_s/MPa	抗拉强度 σ_b/MPa	伸长率 δ_5(%)
普通碳素钢 (GB/T 700—2006)	Q235	240	380～470	25～27
优质碳素钢 (GB/T 699—1999)	45 50	360 390	610 660	16 13
普通低合金钢 (GB/T 1591—2008)	Q345B Q390B	280～350 340～420	480～520 500～560	19～21 17～19
合金结构钢 (GB/T 3077—1999)	40Cr(调质) 40MnB(调质)	550～800 500～800	750～1000 750～1000	9～15 10～12
铝合金 (GB/T 3190—1996)	2A11 2A90	110～240 280	210～420 420	18 13
球墨铸铁 (GB/T 1348—2009)	QT400-18 QT600-3	280～320 400～440	380～420 580～620	17～19 3
灰铸铁 (GB/T 9439—2010)	HT150 HT200		100～280 160～320	

近年来，复合材料以其诸多优点广泛应用于各个工程领域。图 2-22 所示为某种碳/环氧（碳纤维增强环氧树脂基体）单层纤维复合材料沿纤维方向和垂直纤维方向拉伸时的应力□应变曲线，由图可见，材料的力学性能随加力方向变化，即为各向异性，其沿着纤维方向的

抗拉强度和弹性模量均远大于垂直纤维方向的值。碳纤维和玻璃纤维的单向复合材料的力学性能列于表 2-2 中。

表 2-2 单向复合材料的力学性能

材料	弹性模量/GPa		抗拉强度/GPa		伸长率(%)	
	平行纤维	垂直纤维	平行纤维	垂直纤维	平行纤维	垂直纤维
碳纤维/环氧树脂 ($V_f=0.6$)	220	7	1400	38	0.8	0.6
玻璃纤维/聚酯树脂 ($V_f=0.5$)	38	10	750	22	1.8	0.2

注：V_f是纤维在复合材料中所占体积的百分数。

高分子材料是一种常用的工程材料，其种类很多，它们的力学性能有很大差异。主要分这样几类，一类为硬而脆的高分子材料，如聚苯乙烯、有机玻璃等，聚苯乙烯的应力□应变曲线示在图 2-23 中。第二类为具有一定强度和塑性的结晶态高分子材料，如尼龙、聚碳酸酯等，尼龙的应力-应变曲线示于图 2-23 中。第三类为高弹性材料，如橡胶等。需要指出，结晶态高分子材料，拉伸时颈缩现象不是发生在强化阶段之后，而是在屈服的开始。但颈缩后不立即发生断裂，仍能承受很大的应变。

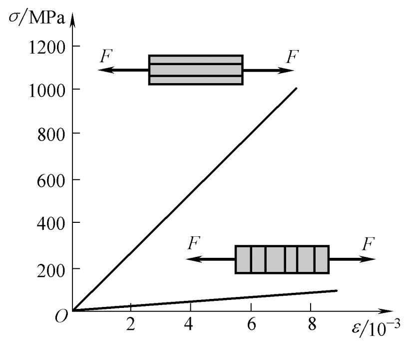


图 2-22 单层纤维复合材料沿不同方向拉伸时的应力-应变曲线

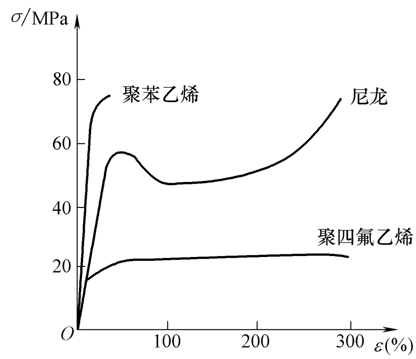


图 2-23 不同的高分子聚合物拉伸时的应力-应变曲线

2.5 温度和时间对材料力学性质的影响*

前面几节讨论了材料在常温、静载下的力学性能，在工程中也有些零、部件，如飞机发动机叶片等长期在高温环境下工作。此时，材料的力学性能与常温下有明显不同，并且往往与作用时间的长短有关。通常以室温为基础，塑性材料的塑性指标随着温度的降低而减小，并随着温度的升高而显著地增大（个别材料也会有相反的现象）。与此相反，衡量材料强度的指标则随着温度的降低而增大，并随着温度的升高而减小。高温、常时工作的构件，会产生蠕变和松弛。

1. 短期静载下温度对低碳钢性能的影响

为确定低碳钢在升温过程中性能的变化规律，可以对于拉伸试件在逐级温度下，进行短期静载拉伸试验。图 2-24 表示在高温、短期、静载下，对低碳钢性能（包括：E、σ_s、σ_b、

δ、ψ）随温度变化的情况。从图线可以看出，E、σ_s 随温度的升高而降低。在 250℃之前，随温度的升高，δ 和 ψ 降低，而 σ_b 增加；在 300℃之后，随温度的升高，δ 和 ψ 增加，而 σ_b 降低。

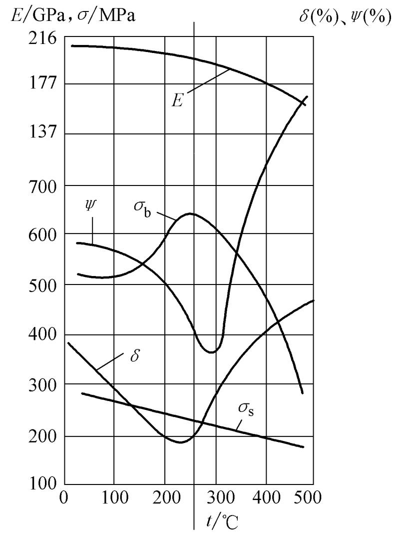


图 2-24　温度对钢材力学性质的影响

在低温下，试验表明低碳钢的弹性极限和强度极限都有所提高，但是伸长率则相应降低。这说明低碳钢倾向于变脆。

2. 高温、长期静载下材料的力学性能

高压蒸汽锅炉、汽轮机、燃气轮机、柴油机、化工炼油设备以及航空发动机中的构件都是长期在高温条件下工作的。所谓高温指材料的工作温度到达 $T>(0.3\sim0.4)T_m$（T_m 为材料的熔点，以热力学温度 K 为单位）。材料在高温下将发生蠕变或者应力松弛现象。材料在高温下的强度与载荷作用的时间有关。载荷作用时间越长，引起变形的抗力越小。材料在高温下不仅强度降低，而且塑性也降低。应变速率越低，作用时间越长，塑性降低越显著，甚至出现脆性断裂。

蠕变是指在长时间的恒温、恒应力作用下，即使应力小于屈服强度，材料也会缓慢地产生塑性变形的现象。由于这种变形到最后导致材料的断裂称为蠕变断裂。材料的蠕变可在任何温度范围内发生，不过高温时，变形速度高，蠕变现象更明显。陶瓷材料在室温一般不考虑蠕变；高分子材料在室温下就能发生蠕变。图 2-25 所示为金属材料在不变的温度和固定应力条件下，蠕变变形 ε 随时间 t 变化的典型曲线。图中 a 点所对应的应变是载荷作用时立刻发生的应变值。从 a 到 b 蠕变速度（即曲线的斜率 $d\varepsilon/dt$）不断减小，是不稳定的蠕变阶段。从 b 到 c 蠕变速度最小，且接近于常量，是稳定的蠕变阶段。从 c 点开始蠕变速度又逐渐增加，是蠕变的加速阶段。过 d 点后蠕变速度急剧变大以致材料断裂破坏。

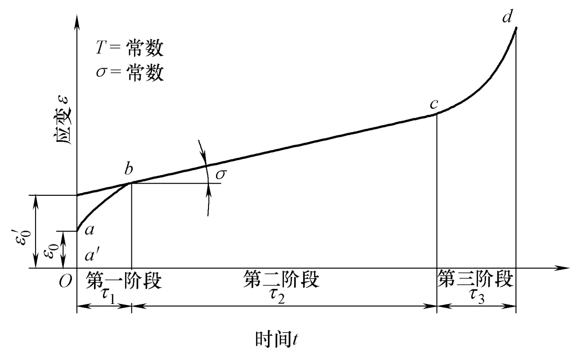


图 2-25　金属材料在温度和应力不变的条件下，蠕变的典型曲线

应力松弛指在变形维持不变的情况下，材料随时间而发展的蠕变变形（不可恢复的塑性变形）；初始应力条件下，金属材料的初始应力条件随时间增加而减小的现象。

2.6　许用应力、安全因数、强度条件

1. 安全因数与许用应力

由于各种原因使结构丧失其正常工作能力的现象，称为失效。工程材料失效的两种形式

为：①塑性屈服，指材料失效时产生明显的塑性变形，并伴有屈服现象。如低碳钢、铝合金等塑性材料。②脆性断裂，材料失效时几乎不产生塑性变形而突然断裂。如铸铁、混凝土等脆断材料。

许用应力：保证构件安全可靠工作所容许的最大应力值。

对于塑性材料，进入塑性屈服时的应力取屈服极限 σ_s，对于某些无明显屈服平台的合金材料取 $\sigma_{0.2}$，则危险应力 $\sigma_u=\sigma_s$ 或 $\sigma_{0.2}$；对于脆性材料：断裂时的应力是强度极限 σ_b，则 $\sigma_u=\sigma_b$。

构件许用应力用 $[\sigma]=\dfrac{\sigma_u}{n}$表示，则工程上一般取

塑性材料：$[\sigma]=\dfrac{\sigma_s(\sigma_{0.2})}{n_s}$；

脆性材料：$[\sigma]=\dfrac{\sigma_b}{n_b}$

式中，n_s、n_b 分别为塑性材料和脆性材料的安全因数。

2. 强度条件

安全因数或许用应力的选定应根据有关规定或查阅国家有关规范或设计手册。通常在静载荷设计中取

$n_s=1.5\sim2.0$，有时可取 $n_s=1.25\sim1.50$

$n_b=2.5\sim3.0$，有时甚至大于 3.5 以上

安全因数的选取原则充分体现了工程上处理安全与经济一对矛盾的原则，是复杂、审慎的事。现从力学角度讨论其影响因素：

1）对载荷估计的准确性与把握性：如重力、压力容器的压力等可准确估计与测量，大自然的水力、风力、地震力等则较难估计。

2）材料的均匀性与力学性能指标的稳定性：如低碳钢之类塑性材料组织较均匀，强度指标较稳定，塑性变形阶段可作为断裂破坏前的缓冲，而铸铁之类脆性材料正相反，强度指标分散度大、应力集中、微细观缺陷对强度均造成极大影响。

3）计算公式的近似性：由于应力、应变等理论计算公式建立在材料均匀连续、各向同性假设基础上，拉伸（压缩）应力、变形公式要求载荷通过等直杆的轴线等，所以材料不均匀性、加载的偏心、杆件的初曲率都会造成理论计算的不精确。

4）环境：工程构件的工作环境比实验室要复杂得多，如加工精度，腐蚀介质，高、低温等问题均应予以考虑。

5）经济性：如飞机对于安全性要求很高，但是考虑运输的性价比，则不能采用太大安全因数。此时，安全性是通过严格控制产品质量和定期进行无损检测来保证的。

设 σ_{max}表示最大正应力，对于一般的变轴力和非等直截面杆（如阶梯杆），则拉伸（压缩）强度条件为

$$\sigma_{max}=\max\left\{\frac{F_N(x)}{A(x)}\right\}\leqslant[\sigma] \tag{2-6}$$

其意义为：最大正应力 σ_{max}应当在不同的可能的危险截面（即：横截面面积最小或轴力最大的截面）上通过比较得到。根据上述强度条件可以解决以下三方面问题：

1）校核强度：

$$\sigma_{max}=\frac{F_{Nmax}}{A}\leqslant[\sigma] \tag{2-7}$$

2）设计截面尺寸：

$$A\geqslant\frac{F_{Nmax}}{[\sigma]} \tag{2-8}$$

3）确定构件所能承受的最大载荷：

$$F_{Nmax}\leqslant[\sigma]A \tag{2-9}$$

通常杆件系统由多根杆组成。确定构件所能承受的最大载荷时，应当先计算第 k 根杆的最大轴力 $F_{Nmax}^{k}=A_k\cdot[\sigma]_k$。其中 A_k 表示第 k 根杆的横截面面积，$[\sigma]_k$ 表示第 k 根杆的材料的许用应力。然后通过静力平衡方程求出该杆的轴力与外载荷 F 的函数关系。最后得到由第 k 根杆的最大轴力 F_{Nmax}^{k}所对应的最大外载荷 F_{max}^{k}。对于由 n 根杆组成的杆件系统，系统的许可外载荷［F］应当通过比较各杆的计算结果，取其中最小值 $[F]=\min\{F_{max}^{1},\cdots,F_{max}^{n}\}$。

例 2-5 杆系结构如图 2-26 所示，已知杆 AB、AC 材料相同，$[\sigma]=160\text{MPa}$，横截面面积分别为 $A_1=706.9\text{mm}^2$，$A_2=314\text{mm}^2$，试确定此结构许可载荷［F］。

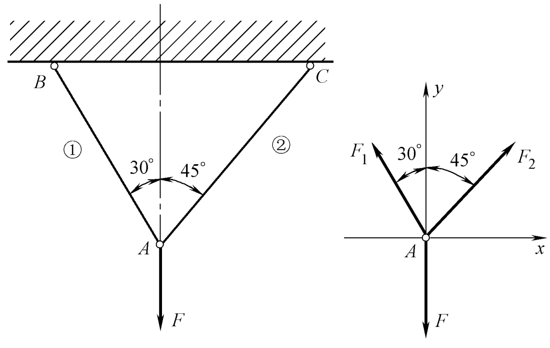


图 2-26

解：（1）由平衡条件计算实际轴力，设 AB 杆轴力为 F_1，AC 杆轴力为 F_2。

对于结点 A，由 $\sum F_x=0$ 得

$$F_2\sin45°=F_1\sin30° \tag{a}$$

由 $\sum F_y=0$ 得

$$F_1\cos30°+F_2\cos45°=F \tag{b}$$

由强度条件计算各杆许用轴力

$$[F_1]\leqslant A_1[\sigma]=706.9\times10^{-6}\text{m}^2\times160\times10^6\text{Pa}=113.1\text{kN} \tag{c}$$

$$[F_2]\leqslant A_2[\sigma]=314\times10^{-6}\text{m}^2\times160\times10^6\text{Pa}=50.3\text{kN} \tag{d}$$

由于 AB、AC 杆不能同时达到许用轴力，如果将［F_1］、［F_2］代入式（b），解得

$$[F]=133.5\text{kN}$$

显然是错误的。

正确的解应由式（a）、式（b）解得各杆轴力与结构载荷 F 应满足的关系

$$F_1=\frac{2F}{1+\sqrt{3}}=0.732F \tag{e}$$

$$F_2=\frac{\sqrt{2}F}{1+\sqrt{3}}=0.518F \tag{f}$$

（2）根据各杆各自的强度条件，即 $F_1\leqslant[F_1]$，$F_2\leqslant[F_2]$ 计算所对应的载荷 $[F]$，由式（c）、式（e）有

$$F_1\leqslant[F_1]=A_1[\sigma]=113.1\text{kN}$$

$$0.732F\leqslant 113.1\text{kN}$$

$$[F']\leqslant 154.5\text{kN} \tag{g}$$

由式（d）、式（f）有

$$F_2\leqslant[F_2]=A_2[\sigma]=50.3\text{kN}$$

$$0.518F\leqslant 50.3\text{kN}$$

$$[F'']\leqslant 97.1\text{kN} \tag{h}$$

要保证 AB、AC 杆的强度，应取式（g）、式（h）二者中的小值，即 $[F'']$，因而得

$$[F]=97.1\text{kN}$$

上述分析表明，求解杆系结构的许可载荷时，要保证各杆受力既满足平衡条件又满足强度条件。

2.7 轴向拉（压）杆件的变形

1. 沿杆件轴线的轴向变形

如图 2-27 所示，设等直杆的原长为 l，横截面面积为 A。在轴向力 F 作用下，长度由 l 变为 l_1。杆件在轴线方向的伸长，即轴向变形为

$$\Delta l=l_1-l \tag{1}$$

由于杆内各点轴向应力 σ 与轴向应变 ε 为均匀分布，所以一点轴向线应变即为杆件的伸长 Δl 除以原长 l：

$$\varepsilon=\frac{\Delta l}{l} \tag{2}$$

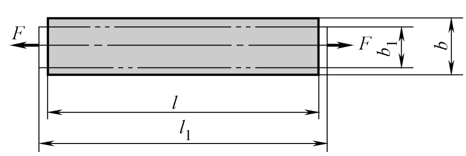


图 2-27　轴向变形

由 $\sigma=E\varepsilon$ 得

$$\frac{F_N}{A}=E\frac{\Delta l}{l}$$

所以

$$\Delta l=\frac{F_N l}{EA}=\frac{Fl}{EA} \tag{2-10}$$

式（2-10）表示：当应力不超过比例极限时，杆件的伸长 Δl 与拉力 F 和杆件的原长度 l 成

正比，与横截面面积 A 成反比。这是胡克定律的另一种表达形式。式中，EA 是材料弹性模量与拉（压）杆件横截面面积的乘积，EA 越大，则变形越小，将 EA 称为抗拉（压）刚度。

2. 横向变形

若在图 2-27 中，设变形前杆件的横向尺寸为 b，变形后相应尺寸变为 b_1，则横向变形为

$$\Delta b = b_1 - b$$

横向线应变可定义为

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}$$

由试验证明，在弹性范围内

$$\left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right| = \mu \tag{2-11}$$

式中，μ 为杆的横向线应变与轴向线应变代数值之比。由于 μ 为反映材料横向变形能力的材料弹性常数，为正值，所以，一般冠以负号 $\mu = -\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon}$，称为泊松比或横向变形因数。

ε' 与 ε 的关系为

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon \tag{2-12}$$

3. 变截面杆的伸长变形

如图 2-28 所示变截面杆，杆截取微分段如图 2-29 所示，其微段的伸长为

$$\mathrm{d}(\Delta l) = \frac{F_{\mathrm{N}}(x)\,\mathrm{d}x}{A(x)E}$$

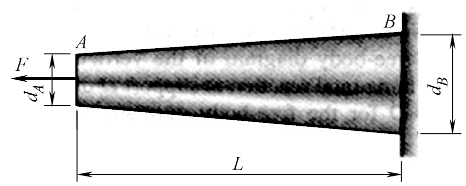


图 2-28　变截面杆

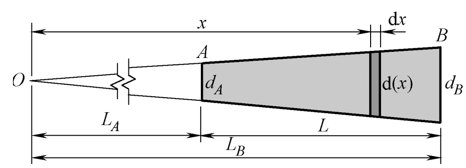


图 2-29　变截面杆中的微分段

积分得

$$\Delta l = \int_L \frac{F_{\mathrm{N}}(x)}{A(x)E}\mathrm{d}x$$

因为

$$d(x) = \frac{d_A \cdot x}{L_A}$$

所以

$$A(x) = \frac{\pi\,[d(x)]^2}{4} = \frac{\pi\,(d_A \cdot x)^2}{4L_A^2}$$

$$\Delta l = \int \frac{F_{\mathrm{N}}(x)\,\mathrm{d}x}{EA(x)} = \int_{L_A}^{L_B} \frac{F\mathrm{d}x(4L_A^2)}{E(\pi d_A^2 \cdot x^2)}$$

$$= \frac{4FL}{\pi E d_A^2}\left(\frac{L_A}{L_B}\right) = \frac{4FL}{\pi E d_A d_B}$$

例 2-6 图 2-30 所示为变截面杆，已知 BD 段 $A_1=2\text{cm}^2$，DA 段 $A_2=4\text{cm}^2$，$F_1=5\text{kN}$，$F_2=10\text{kN}$。求 AB 杆的变形 Δl_{AB}。（材料的 $E=120\times10^3\text{MPa}$）

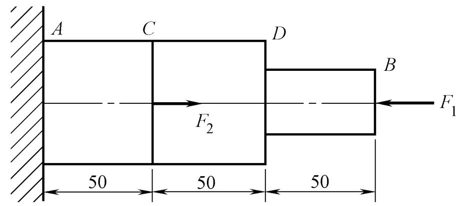


图 2-30　变截面杆

解： 首先分别求得 BD、DC、CA 三段的轴力 F_{N1}、F_{N2}、F_{N3}分别为

$$F_{N1}=-5\text{kN}$$

$$F_{N2}=-5\text{kN}$$

$$F_{N3}=5\text{kN}$$

$$\Delta l_{BD}=\Delta l_1=\frac{F_{N1}l_1}{EA_1}=\frac{-5\times10^3\text{N}\times0.5\text{m}}{120\times10^9\text{Pa}\times2\times10^{-4}\text{m}^2}=-1.05\times10^{-4}\text{m}$$

$$\Delta l_{DC}=\Delta l_2=\frac{F_{N2}l_2}{EA_2}=\frac{-5\times10^3\text{N}\times0.5\text{m}}{120\times10^9\text{Pa}\times4\times10^{-4}\text{m}^2}=-0.52\times10^{-4}\text{m}$$

$$\Delta l_{CA}=\Delta l_3=\frac{F_{N3}l_3}{EA_3}=\frac{5\times10^3\text{N}\times0.5\text{m}}{120\times10^9\text{Pa}\times4\times10^{-4}\text{m}^2}=0.52\times10^{-4}\text{m}$$

$$\Delta l_{AB}=\Delta l_1+\Delta l_2+\Delta l_3=-1.05\times10^{-4}\text{m}$$

Δl_{AB}的负号说明此杆缩短。

变形与位移：对轴向拉（压）杆，它们的关系明确，如例 2-6 中因为 $\delta_A=0$，则 $\Delta l_{AB}=\delta_B$。对于杆系结构，由于变形和结构约束条件，从而使变形和位移之间还应满足一定的几何关系。

例 2-7 图 2-31a 所示杆系结构，已知 BC 杆圆截面 $d=20\text{mm}$，长 1.2m，BD 杆为 8 号槽钢，$[\sigma]=160\text{MPa}$，$E=200\text{GPa}$，$F=60\text{kN}$。求 B 点的位移。

解：（1）计算轴力，取结点 B（见图 2-31b）

由$\sum F_x=0$，得

$$F_2\cos\alpha-F_1=0 \qquad (\text{a})$$

由$\sum F_y=0$，得

$$F_2\sin\alpha-F=0 \qquad (\text{b})$$

所以

$$F_2=75\text{kN}\quad（压）$$

$$F_1=45\text{kN}\quad（拉）$$

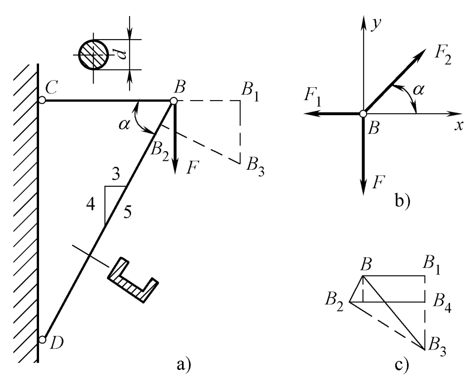


图　2-31

（2）计算变形

由$\overline{BC}:\overline{CD}:\overline{BD}=3:4:5$，得$\overline{BD}=l_2=2\text{m}$。

BC 杆圆截面的面积 $A_1=314\times10^{-6}\text{m}^2$，$BD$ 杆为 8 号槽钢，由型钢表查得截面积 $A_2=1020\times10^{-6}\text{m}^2$，由胡克定律求得

$$\overline{BB_1}=\Delta l_1=\frac{F_1l_1}{EA_1}=\frac{45\times10^3\text{N}\times1.2\text{m}}{200\times10^9\text{Pa}\times314\times10^{-6}\text{m}^2}=0.86\times10^{-3}\text{m}$$

$$\overline{BB_2}=\Delta l_2=\frac{F_2 l_2}{EA_2}=-\frac{75\times10^3\,\mathrm{N}\times2\mathrm{m}}{200\times10^9\,\mathrm{Pa}\times1020\times10^{-6}\mathrm{m}^2}=-0.732\times10^{-3}\mathrm{m}$$

（3）确定 B 点位移。

已知 Δl_1 为拉伸变形，Δl_2 为压缩变形。设想将托架在结点 B 拆开（见图 2-31a），BC 杆伸长变形后变为 B_1C，BD 杆压缩变形后变为 B_2D。分别以 C 点和 D 点为圆心、$\overline{CB_1}$ 和 $\overline{DB_2}$ 为半径，作圆弧相交于 B_3。B_3 点即为托架变形后 B 点的位置。因为是小变形，B_1B_3 和 B_2B_3 是两段极其微小的短弧，因而可用分别垂直于 BC 和 BD 的直线线段来代替，这两段直线的交点即为 B_3。$\overline{BB_3}$ 即为 B 点的位移。

也可以用图解法求位移 $\overline{BB_3}$。这里用解析法来求位移 $\overline{BB_3}$。注意到 $\triangle BCD$ 三边的长度比为 3∶4∶5，由图 2-31c 可以求出

$$\overline{B_2B_4}=\Delta l_2\times\frac{3}{5}+\Delta l_1$$

$$\overline{B_1B_3}=\overline{B_1B_4}+\overline{B_4B_3}=\overline{BB_2}\times\frac{4}{5}+\overline{B_2B_4}\times\frac{3}{4}=\Delta l_2\times\frac{4}{5}+\left(\Delta l_2\times\frac{3}{5}+\Delta l_1\right)\frac{3}{4}=1.56\times10^{-3}\mathrm{m}$$

B 点的水平位移

$$\overline{BB_1}=\Delta l_1=0.86\times10^{-3}\mathrm{m}$$

最后求出位移 $\overline{BB_3}$ 为

$$\overline{BB_3}=\sqrt{(\overline{B_1B_3})^2+(\overline{BB_1})^2}=1.78\times10^{-3}\mathrm{m}$$

2.8　拉（压）杆超静定问题

超静定问题是指单凭静力学平衡方程不能解出全部未知力的问题。此时未知力个数多于平衡方程的个数，其差数称为超静定次数。

一般超静定问题的解法为：

1）解除“多余”约束，并以相应的“多余”约束力代替，使超静定结构变为形式上的静定结构（此相应静定结构称为静定基），建立静力平衡方程。

2）根据“多余”约束性质，建立变形协调方程。变形协调方程数应当与“多余”约束个数相等。

3）建立物理方程（如胡克定律、热膨胀规律等）。

4）联立解静力平衡方程以及（2）和（3）所建立的补充方程，求出未知力（约束力或内力）。

变形协调条件应使静定基变形与原超静定结构相一致。

应当指出，如果约束力一律假设为拉力，则变形协调方程应当是外力和“多余”约束力所引起的位移的代数和；如果约束力按照实际变形施加，则变形协调方程应当是各力所引起的位移的“纯”几何关系。

例 2-8 如图 2-32a 所示，等截面直杆的刚度为 EA，杆的中点作用一个集中力 F。求约束力。

解：设 B 处约束为“多余”约束，解除 B 处约束，即得相应静定基（见图 2-32b）。此结构的约束力个数为 2，独立平衡方程数为 1，属于一次超静定问题。

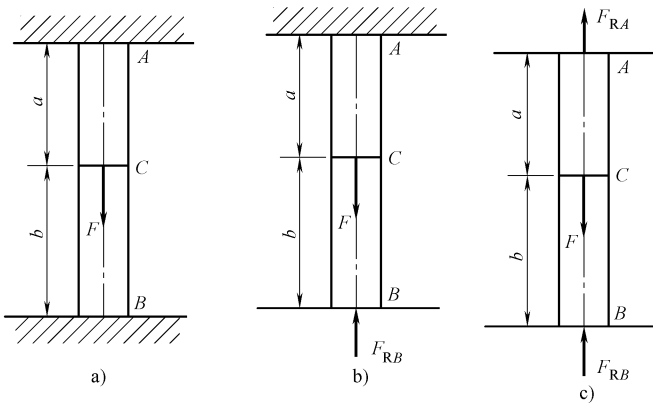


图 2-32

（1）静力平衡方程

如图 2-32c 所示，约束力 F_{RA} 和 F_{RB} 按照实际变形施加，即 F_{RA} 为拉力，F_{RB} 为压力。

由 $\sum F_y=0$ 得

$$F_{RA}+F_{RB}-F=0$$

即

$$F_{RA}+F_{RB}=F \tag{a}$$

（2）变形协调方程

按照设定的静定基，变形协调方程应当是外力 F 和 F_{RB} 引起的 B 端位移的“纯”几何关系，即

$$\Delta l_F=\Delta l_{F_{RB}} \tag{b}$$

（3）物理方程

由胡克定律

$$\Delta l_F=\frac{Fa}{EA},\Delta l_{F_{RB}}=\frac{F_{RB}(a+b)}{EA} \tag{c}$$

将式（c）代入式（b）得补充方程

$$\frac{Fa}{EA}=\frac{F_{RB}(a+b)}{EA} \quad \text{或} \quad F_{RB}=\frac{a}{a+b}F \tag{d}$$

（4）求解式（a）、式（d）得

$$F_{RB}=\frac{Fa}{a+b},F_{RA}=\frac{Fb}{a+b}$$

例 2-9 如图 2-33a 所示，AB 杆为刚性杆，杆①、杆②刚度为 EA，载荷为 F。求 1 杆、2 杆的轴力。

解：（1）静力平衡方程

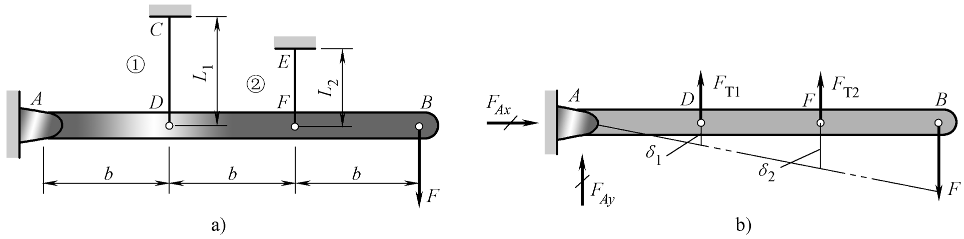


图　2-33

虽然对于平面刚体可列出三个独立静力平衡方程，但本题只关心 1 杆、2 杆的轴力，不涉及 A 点约束力，故只列出关于 A 点的力矩平衡方程。

$$\sum M_A=0,\quad F_{T1}\cdot b+F_{T2}\cdot 2b-F\cdot 3b=0 \tag{a}$$

（2）变形协调方程

本题仅列出一个平衡方程，但是包含两个未知力，所以属于一次超静定问题，需要列出一个变形协调方程。由于 AB 杆为刚性杆，变形后 AB 杆位置如图 2-33b 中虚线所示。由于约束力按照实际变形施加，则变形协调方程为

$$\delta_2=2\delta_1 \tag{b}$$

（3）物理方程

$$\delta_1=\frac{F_{T1}L_1}{E_1A_1},\quad \delta_2=\frac{F_{T2}L_2}{E_2A_2} \tag{c}$$

由式（a）、式（b）、式（c）解得

$$F_{T1}=\frac{3F\dfrac{L_2}{E_2A_2}}{4\dfrac{L_1}{E_1A_1}+\dfrac{L_2}{E_2A_2}}=\frac{3FE_1A_1L_2}{4E_2A_2L_1+E_1A_1L_2}\qquad F_{T2}=\frac{6F\dfrac{L_1}{E_1A_1}}{4\dfrac{L_1}{E_1A_1}+\dfrac{L_2}{E_2A_2}}=\frac{6FE_2A_2L_1}{4E_2A_2L_1+E_1A_1L_2}$$

例 2-10　弹性模量为 E_1、横截面面积为 A_1 的实心圆杆①与弹性模量为 E_2、横截面面积为 A_2 的圆筒②用刚性板连接，如图 2-34a 所示。试求在外力 F 作用下圆杆和圆筒内的应力。

解：（1）静力平衡方程

用截面法，受力如图 2-34b 所示。

$$\sum F_y=0, F-F_{N1}-F_{N2}=0 \tag{a}$$

其中，F_{N1}、F_{N2} 分别为圆杆①和圆筒②的未知轴力。未知力有两个，而共线力系独立的平衡方程只有一个，故为一次超静定问题。

（2）变形协调方程

由于圆杆①和圆筒②在两刚性板之间，所以变形相等。

$$\Delta l_1=\Delta l_2 \tag{b}$$

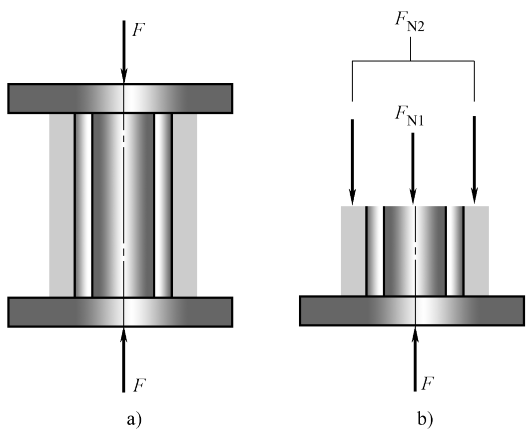


图　2-34

（3）物理方程

$$\Delta l_1=\frac{F_{N1}l}{E_1A_1},\Delta l_2=\frac{F_{N2}l}{E_2A_2} \tag{c}$$

将式（c）代入式（b），整理后得

$$\frac{F_{N1}l}{E_1A_1}=\frac{F_{N2}l}{E_2A_2} \tag{d}$$

将式（a）和式（d）联立解得

$$F_{N1}=\frac{E_1A_1}{E_1A_1+E_2A_2}F,\quad F_{N2}=\frac{E_2A_2}{E_1A_1+E_2A_2}F$$

圆杆①和圆筒②的应力均为压应力

$$\sigma_1=\frac{E_1}{E_1A_1+E_2A_2}F,\quad \sigma_2=\frac{E_2}{E_1A_1+E_2A_2}F$$

从上例可见，求解超静定问题的主要工作，可以归纳为以下三个方面：

1）静力方面：建立静力平衡方程；

2）变形方面：建立变形谐调方程；

3）物理方面：建立变形与力之间的关系式。

例 2-11 图 2-35a 所示杆件结构。已知 1 杆的抗拉刚度为 E_1A_1，2 杆及 3 杆的抗拉刚度相等，为 E_2A_2。图中长度尺寸 l 和 α 亦均为已知。求各杆的轴力。

解：平面汇交力系，有两个独立平衡方程，未知力有三个（见图 2-35b），故为一次超静定问题。

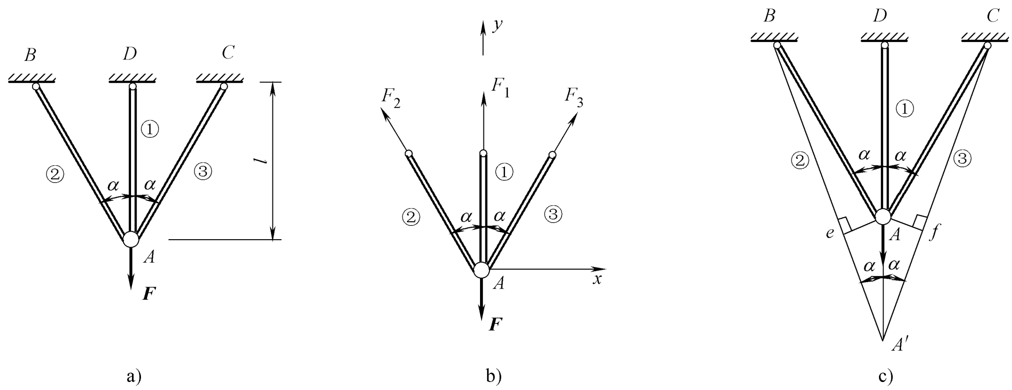


图 2-35

（1）静力平衡条件

$$\sum F_x=0,F_2=F_3 \tag{a}$$

$$\sum F_y=0,F_1+(F_2+F_3)\cos\alpha-F=0 \tag{b}$$

（2）变形协调方程

由于结构有对称性，②杆和③杆的变形量应相等。这样可假定变形后结点 A 移到 A'点。位移$\overline{AA'}$就是①杆的变形量 Δl_1。因为变形很小，则可认为图 2-35c 中，$\angle AA'B=\alpha$。过 A 点向 BA'作垂线 Ae，则可认为$\overline{A'e}$就是②杆的变形量 Δl_2。于是由图 2-35c 中所示的几何关系可

得变形谐调方程：

$$\Delta l_1 \cdot \cos\alpha = \Delta l_2 = \Delta l_3 \tag{c}$$

（3）物理方程：

$$\Delta l_1 = \frac{F_1 l}{E_1 A_1} \tag{d}$$

$$\Delta l_2 = \frac{F_2}{E_2 A_2} \cdot \frac{l}{\cos\alpha} \tag{e}$$

将式（d）及式（e）代入式（c）简化后得

$$F_1 - F_2 \cdot \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2 \cdot \cos^2\alpha} = 0 \tag{f}$$

将式（a）、式（b）及式（f）联立求解，得所求轴力：

$$F_1 = \frac{F}{1+2\dfrac{E_2 A_2}{E_1 A_1} \cdot \cos^2\alpha}$$

$$F_2 = F_3 = \frac{F}{2\cos\alpha + \dfrac{1}{\dfrac{E_2 A_2}{E_1 A_1} \cdot \cos^2\alpha}}$$

由内力结果可见，超静定杆的轴力除受外力和结构尺寸 α 决定外，还与各杆刚度的比值有关。这是不同于静定问题的一个重要特点。

2.9 温度应力和装配应力

1. 温度应力

由于温度变化会引起物体的膨胀或收缩，对于静定结构由于可以自由伸缩变形，则产生热变形但是不会产生热应力。而对于超静定结构，由于胀缩变形受到约束，则会产生内应力。这种因温度变化而引起的内应力，称为温度应力（也称热应力）。

例 2-12　如图 2-36 所示，由于蒸汽管两端为固定端约束，当温度上升 Δt 时，求 A、B 端约束力 F_{RA}、F_{RB}。

解：（1）静力平衡方程

$$F_{RA} = F_{RB} = F_N \tag{a}$$

未知力有两个，而 F_N 表示杆内的轴力。由于共线力系独立的平衡方程只有一个，故为一次超静定问题。

（2）变形协调方程

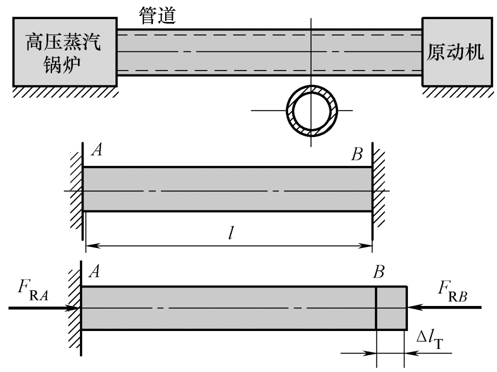


图　2-36

$$\Delta l F_N = \Delta l_T \tag{b}$$

$\Delta l F_N$是杆件因 F_N 作用而产生的缩短；Δl_T 是温度上升 Δt 时的伸长。

（3）物理方程

$$\Delta l_T = \alpha \Delta t \cdot l, \Delta l F_N = \frac{F_N l}{EA} \tag{c}$$

由式（b）、式（c）得补充方程

$$\alpha \Delta t \cdot l = \frac{F_N l}{EA}$$

即有

$$F_N = \alpha \Delta t E A$$

应力为

$$\sigma_T = \frac{F_N}{A} = \alpha \Delta t \cdot E \tag{d}$$

结果为正，说明设定杆受轴向压力是实际受力方向，故该杆由于温度变化引起的应力是压应力。对于钢材，$\alpha = 1.2 \times 10^{-5} K^{-1}$，$E = 210 \times 10^3 MPa$，则当温度升高 $\Delta t = 40℃$（即 40K）时，杆内的温度应力由式（d）算得为

$$\sigma = \alpha E \Delta t = (1.2 \times 10^{-5} K^{-1}) \times (210 \times 10^3 MPa) \times 40℃ = 100MPa \quad (压应力)$$

2. 装配应力

构件的加工误差是难以避免的。对静定结构，加工误差只是引起结构几何形状的微小变化，而不会在构件内引起应力。但对超静定结构，加工误差就要在构件内引起应力。这种由于装配而引起的应力称为装配应力。装配应力是结构构件在载荷作用之前已具有的应力，因而是一种初应力。

例 2-13 在多杆装配结构中，假设 AB、CD 杆的材料和截面尺寸相同；OB 为刚性杆。图 2-37a 所示为设计没有冗余杆的静定结构。此时如果将 AB 杆加工短了，装配结果是使 OB 杆略微倾斜（图中虚线所示），AB 杆中并没有应力存在。图 2-37b 所示是增加有冗余杆的静不定结构，此时若 AB 杆加工短了 δ 尺寸，实行强迫装配后，AB 杆将产生拉应力，CD 杆将产生压应力。此即装配应力。设材料的弹性模量 $E = 200GPa$，制造误差 $\delta = l/1000$。试求结构的装配应力。

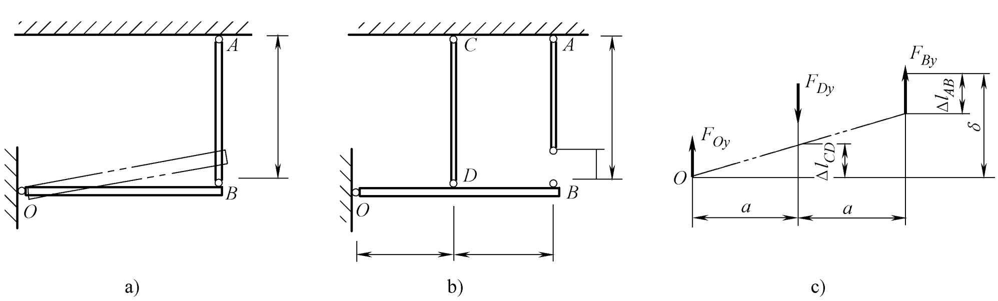


图 2-37 多杆装配结构

解：（1）静力平衡方程

虽然对于平面刚体可列出三个独立静力平衡方程，但本题只关心 AB 杆和 CD 杆的轴力，不涉及 O 点约束力，故只列出关于 O 点的力矩平衡方程。一个平衡方程，包含两个未知力，属于一次超静定问题。

$$\sum M_O=0,-F_{Dy}\cdot a+F_{By}\cdot 2a=0 \tag{a}$$

（2）变形协调方程

$$2\Delta l_{CD}+\Delta l_{AB}=\delta \tag{b}$$

（3）物理方程

$$\Delta l_{CD}=\frac{F_{Dy}l}{EA},\Delta l_{AB}=\frac{F_{By}l}{EA} \tag{c}$$

将式（c）代入式（b）简化后得补充方程

$$F_{Dy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{l}EA-F_{By}\right) \tag{d}$$

联立式（a）和式（d），解得

$$F_{Dy}=\frac{2\delta}{5l}EA,\quad F_{By}=\frac{\delta}{5l}EA$$

杆的装配应力：

$$\sigma_{CD}=\frac{2\delta}{5l}E=80\text{MPa}(\text{压应力}),\sigma_{AB}=\frac{\delta}{5l}E=40\text{MPa}(\text{拉应力})$$

从以上计算结果可看出，制造误差 δ/l 虽很小，但装配后却引起了相当大的初应力。在实际承载过程中，杆的应力是装配初应力与外载荷引起的应力相叠加。因此，装配应力的存在对于结构往往是不利的，工程中常要求加工构件时要保证足够的加工精度，来降低有害的装配应力。但事物都是一分为二的，装配应力也有有用的一面，机械上的过盈配合就是利用装配应力的一个例证。综上分析结果可知：超静定结构会引起温度应力和装配应力。

2.10 应力集中的概念

实际工程构件中，有些零件常存在切口、切槽、油孔、螺纹等，致使这些部位上的截面尺寸发生突然变化。如图 2-38 所示开有圆孔的板条，当其受轴向拉伸时，在圆孔附近的局部区域内，应力的数值剧烈增加，而在离开这一区域稍远的地方，应力迅速降低而趋于均匀。这种现象，称为应力集中。截面尺寸变化越急剧，孔越小，角越尖，应力集中的程度就越严重，局部出现的最大应力 $\sigma_{\max}$ 就越大。鉴于应力集中往往会削弱杆件的强度，因此在设计中应尽可能避免或降低应力集中的影响。为了表示应力集中的强弱程度，定义理论应力集中因数

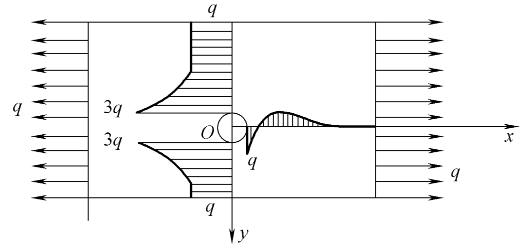


图 2-38　带圆孔板受拉时的应力集中

$$k=\frac{\sigma_{max}}{\sigma_0} \tag{2-13}$$

式中，σ_{max}为削弱面上轴向正应力的峰值；σ_0为削弱面上名义应力。理论应力集中因数反映了应力集中的程度，是一个大于1的因数。应力集中与材料无关，仅与当截面的几何形状相关。当截面尺寸改变得越急剧，角越尖，孔越小时，应力集中的程度就越严重。如图2-39所示，两块矩形板受到载荷集度 $q=100$MPa 拉伸作用。其中带有圆孔的矩形板的应力集中因数约为3.32，而带有菱形孔的矩形板的应力集中因数约为4.20。一些常见情况下的理论应力集中因数已编制成图表列于有关手册之中。

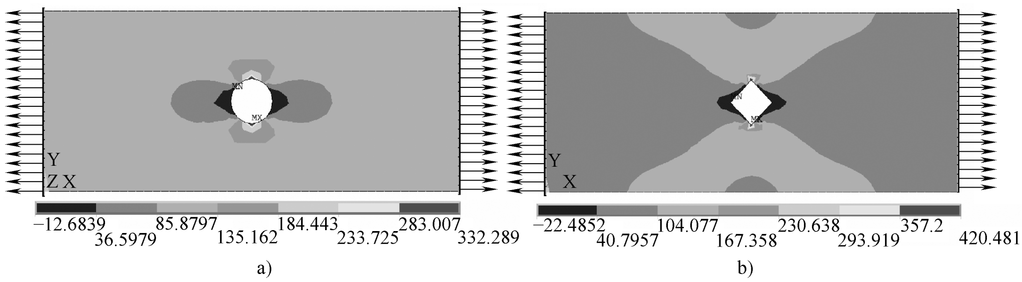


图2-39 带有两种不同孔的应力集中

必须指出，不同的材料对应力集中的敏感程度并不相同。塑性材料有屈服现象，当局部区域最大应力达到屈服极限时，因屈服范围的扩大使截面的应力趋于均匀，减少了应力集中的危害。所以材料的良好塑性变形能力可以缓和变形过程产生的应力集中峰值，因而对低碳钢之类的塑性材料应力集中对强度的削弱作用不很明显。而脆性材料特别对铸铁之类内含大量显微缺陷，组织不均匀的材料将造成严重影响。脆性材料由于没有屈服现象，断裂时变形小，当局部区域最大应力达到抗拉（压）强度后，在应力集中处产生裂纹而断裂。所以应力集中造成明显影响。

2.11 连接件的实用计算

工程结构和机器是由若干构件或零件装配起来的，其中起连接作用的部件称为连接件，如销钉、螺栓、铆钉、键等。连接件通常受到剪切与挤压作用，连接件内应力分布规律复杂，难以用材料力学知识做精确分析。工程中常采用实用计算的方法，假设应力均匀分布，从而对连接结构进行强度估算，称为实用计算。

1. 剪切件的概念

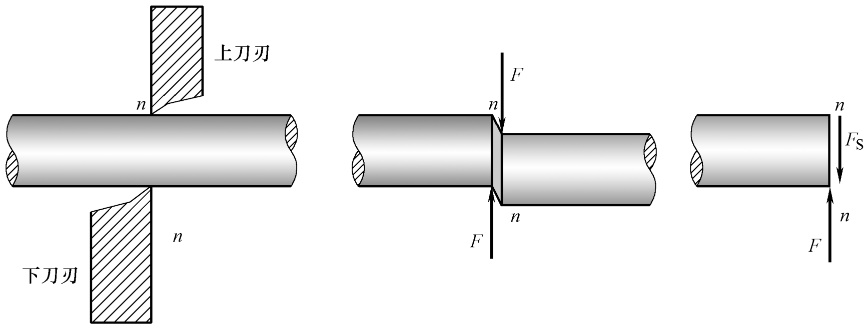
图2-40所示为钢杆剪切加工过程的剪切受力图。从中可以看出，工程上的剪切件有以下特点：

（1）受力特点　杆件两侧作用大小相等、方向相反、作用线相距很近的外力。

（2）变形特点　两外力作用线间截面发生错动，产生剪切变形。两个力之间的截面沿剪切面相对错动。构件只有一个剪切面的情况称为单剪切，有两个剪切面时称为双剪切。

2. 切应力及剪切实用计算

剪切实用计算中，假定受剪面上各点处与剪力 F_S 相平行的切应力相等，于是受剪面上



a)　　b)　　c)

图 2-40　钢杆受剪示意图

的切应力为

$$\tau = \frac{F_S}{A} \tag{2-14}$$

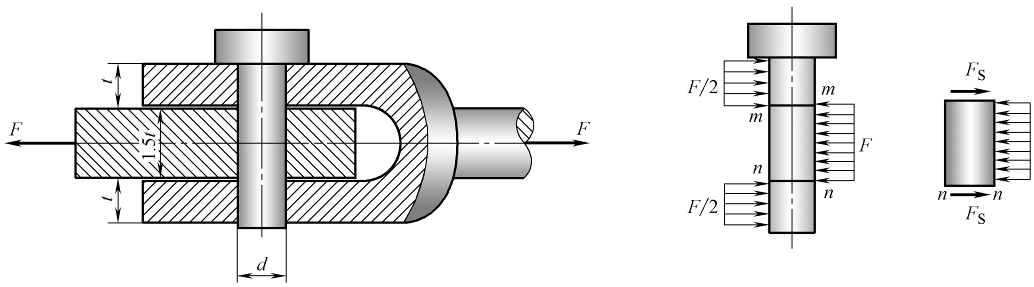
式中，F_S 为剪力；A 为剪切面积，τ 为名义切应力。

剪切强度条件可表示为

$$\tau = \frac{F_S}{A} \leqslant [\tau] \tag{2-15}$$

式中，$[\tau]$ 为构件许用切应力；A 为杆件受剪切面的剪切面积。

例 2-14　电瓶车挂钩由插销连接，如图 2-41a 所示。插销材料为 20 号钢，$[\tau]=30\text{MPa}$，直径 $d=20\text{mm}$。挂钩及被连接的板件的厚度分别为 $t=8\text{mm}$ 和 $1.5t=12\text{mm}$。牵引力 $F=15\text{kN}$。试校核插销的剪切强度。



a)　　b)

图 2-41　插销的剪切受力分析

解：插销受力如图 2-41b 所示。根据受力情况，插销中段相对于上、下两段，沿 $m—m$ 和 $n—n$ 两个面向左错动。所以有两个剪切面，称为双剪切。由平衡方程容易求出

$$F_S = \frac{F}{2}$$

插销横截面上的切应力为

$$\tau=\frac{F_S}{A}=\frac{15\times10^3\text{N}}{2\times\frac{\pi}{4}(20\times10^{-3}\text{m})^2}=23.9\text{MPa}<[\tau]$$

故插销满足剪切强度要求。

3. 挤压及其实用计算

挤压：连接和被连接件接触面相互压紧的现象，图 2-42 所示就是铆钉孔被压成长圆孔的情况。

有效挤压面：挤压面在垂直于总挤压力作用平面上的投影。

挤压时，以 F_{bs}表示挤压面上传递的力，A_{bs}表示挤压面积，则挤压应力为

$$\sigma_{bs}=\frac{F_{bs}}{A_{bs}}\leqslant[\sigma_{bs}] \tag{2-16}$$

式中，$[\sigma_{bs}]$ 为材料的许用挤压应力，一般取 $[\sigma_{bs}]=(1.7\sim2)[\sigma]$。

对于平键：$A_{bs}=\frac{hl}{2}$，如图 2-43 所示。

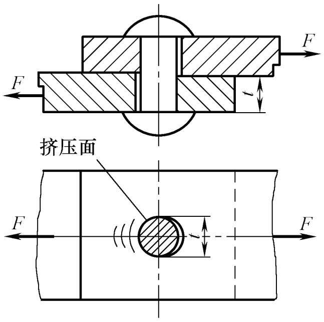


图 2-42 铆钉孔挤压图

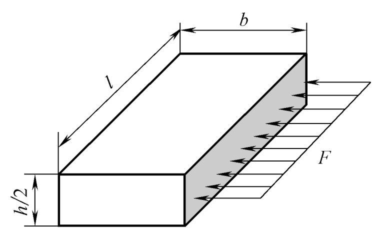
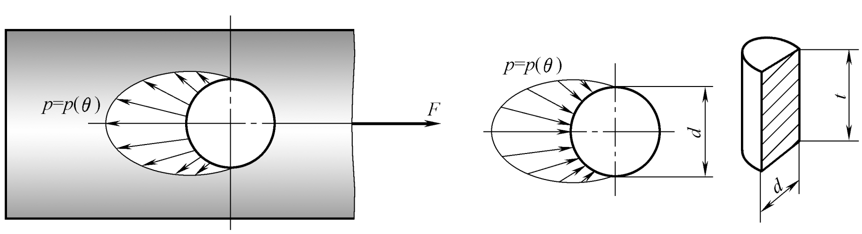


图 2-43 键的挤压面

对于圆截面：挤压面面积是圆柱的投影面积：$A_{bs}=dt$，如图 2-44c 所示。



a) b) c)

图 2-44 圆截面的挤压面

例 2-15 如图 2-45 所示，一根轴通过平键与圆盘连接。已知作用于轴的外力偶为 $M=170\text{N}\cdot\text{m}$，键所受的力为 $F=12.1\text{kN}$。平键的尺寸为：$b=28\text{mm}$，$h=16\text{mm}$，$l=42\text{mm}$，圆轴直径 $d=28\text{mm}$。键的许用切应力 $[\tau]=87\text{MPa}$，轮毂的许用挤压应力取 $[\sigma_{bs}]=100\text{MPa}$，试

校核该连接结构的剪切和挤压强度。

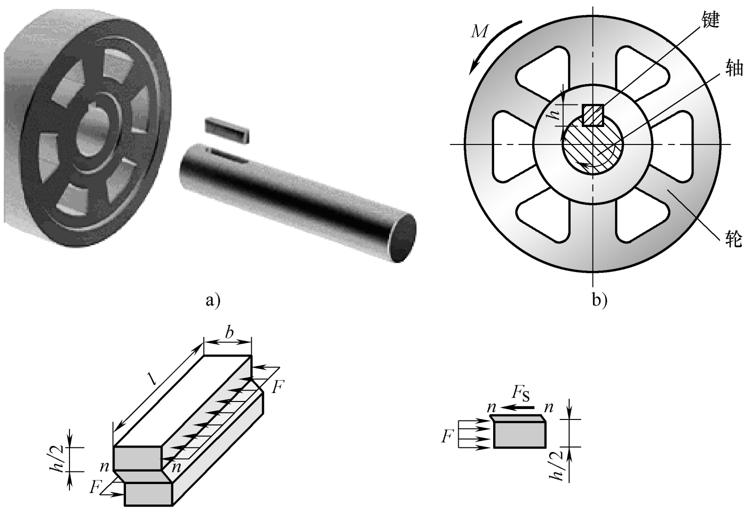


图 2-45　轴通过平键与圆盘连接

解：（1）校核剪切强度

键的受力情况如图 2-45c 所示，此时剪切面上的剪力为

$$F_S=\frac{2M}{d}=\frac{2\times170\text{N}\cdot\text{m}}{28\times10^{-3}\text{m}}=12142\text{N}$$

对于平键，剪切面面积为

$$A=bl=28\text{mm}\times42\text{mm}=1176\text{mm}^2=1176\times10^{-6}\text{m}^2$$

所以，平键的工作切应力为

$$\tau=\frac{F_S}{A}=\frac{12142\text{N}}{1176\times10^{-6}\text{m}^2}=10.32\times10^6\text{Pa}=10.32\text{MPa}<[\tau]=87\text{MPa}$$

满足剪切强度条件。

（2）校核挤压强度

与轴和键比较，通常轮毂抵抗挤压的能力较弱。轮毂挤压面上的挤压力为

$$F=F_S=12142\text{N}$$

因为轮毂挤压面面积与键的挤压面面积相等，设键与轮毂的接触高度为 $h/2$，则挤压面面积为

$$A_{bs}=\frac{h}{2}\cdot l=\frac{16\text{mm}\times42\text{mm}}{2}=336\text{mm}^2=336\times10^{-6}\text{m}^2$$

故轮毂的工作挤压应力为

$$\sigma_{bs}=\frac{F}{A_{bs}}=\frac{12142\text{N}}{336\times10^{-6}\text{m}^2}=36\times10^6\text{Pa}=36\text{MPa}<[\sigma_{bs}]=100\text{MPa}$$

故而也满足挤压强度条件。所以，此连接结构安全。

例 2-16　已知铆接接头如图 2-46 所示，$b=80\text{mm}$，$\delta=10\text{mm}$，$F=90\text{kN}$，铆钉直径 $d=10\text{mm}$，铆钉与钢板材料相同，$[\sigma_{bs}]=320\text{MPa}$，$[\sigma]=160\text{MPa}$，$[\tau]=140\text{MPa}$。校核连接结

构的剪切、挤压和拉伸强度。

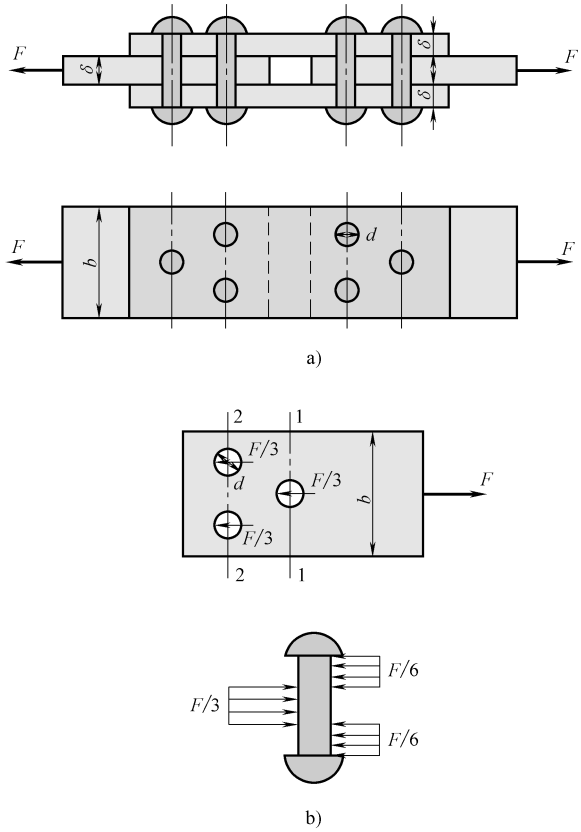


图 2-46　通过铆钉连接两块板

解：(1) 受力分析

如果搭接头的每块主板中的铆钉超过一个，这种接头就称为铆钉群接头。当外力（或外力矩）通过铆钉群中心时，可认为每个铆钉受力均等，取任意一铆钉做剪切强度计算，然后任一铆钉所连接的板及内孔做拉伸强度和挤压强度计算。本例中，F 通过铆钉群中心，故每个铆钉受力均等为 $F_N = F/3$。

(2) 铆钉剪切强度校核

由于是对接，铆钉又受双剪。剪切强度为

$$\tau = \frac{F/6}{\pi d^2/4} = 95.5\text{MPa} < [\tau]$$

铆钉剪切强度足够。

(3) 铆钉的挤压强度校核

$$\sigma_{bs} = \frac{F/3}{\delta d} = 254.9\text{MPa} < [\sigma_{bs}]$$

挤压强度满足。

(4) 板的拉伸强度校核

危险截面可能是截面 1—1、截面 2—2，分别校核为：

截面 1—1：

$$\sigma = F_{N1}/A_{t1} = \frac{F}{(b-d)\delta} = 139.8\text{MPa} < [\sigma]$$

截面 2—2：

$$\sigma = F_{N2}/A_{t2} = \frac{2F/3}{(b-2d)\delta} = 114.0\text{MPa} < [\sigma]$$

板拉伸强度也满足。

本章小结

1. 本章主要介绍轴向拉伸和压缩时的重要概念：轴力、应力、变形和应变等。

2. 轴向拉伸和压缩时，基于平面假设获得杆件横截面正应力公式

$$\sigma = \frac{F_N}{A}$$

平面假设：变形前后横截面保持为平面，而且仍垂直于杆件的轴线。

3. 对于材料力学性能的研究一般是通过试验方法，其中拉伸试验是最主要、最基本的一种试验。低碳钢的拉伸试验是一个典型的试验。通过测量拉伸全过程的曲线和试件破坏断口，可得到如下试验资料和性能指标：

σ_p、σ_e——材料的弹性指标；

E——材料抵抗弹性变形能力的指标，是材料的刚度指标；

$\sigma_s(\sigma_{0.2})$、σ_b——材料的强度指标；

δ、ψ——材料的塑性指标。

其中，$\sigma_{0.2}$——名义屈服极限等测定有专门拉伸试验。

4. 工程中一般把材料分为塑性材料和脆性材料。塑性材料的强度指标是屈服极限 σ_s（或 $\sigma_{0.2}$），而脆性材料的强度指标是强度极限 σ_b。

5. 强度计算是材料力学研究的重要问题。轴向拉伸和压缩时，构件的强度条件是

$$\sigma_{max} = \max\left\{\frac{F_N(x)}{A(x)}\right\} \leqslant [\sigma]$$

其中［σ］称为许用应力。通过强度条件具体进行强度校核、选定截面尺寸和确定许可载荷三项工作。

6. 胡克定律

$$\sigma = E\varepsilon$$

胡克定律是揭示在比例极限内应力和应变的关系，它是材料力学最基本的定律之一。

7. 线弹性伸长（或压缩）变形

$$\sigma = E\varepsilon, \Delta l = \frac{F_N l}{EA} \quad \text{（常轴力及等截面）}$$

或

$$\Delta l = \int_l \frac{F_N(x)\mathrm{d}x}{EA(x)} \quad \text{（变轴力或变截面）}$$

或

$$\Delta l = \sum \frac{F_{Ni} l_i}{E_i A_i} \quad \text{（轴力、截面积和材料阶梯变化）}$$

8. 应初步掌握拉（压）超静定问题的特点及解法。

9. 对剪切实用计算做如下主要假设：

（1）假设剪切面上的切应力均匀分布，方向与剪力 F_S 一致，由此得出剪切强度条件为

$$\tau = \frac{F_S}{A} \leqslant [\tau]$$

（2）假设挤压面上的挤压应力均匀分布，方向垂直于挤压面，由此得出挤压强度条件为

$$\sigma_{bs} = \frac{F_{bs}}{A_{bs}} \leqslant [\sigma_{bs}]$$

注意到，强度条件中的许用应力是在相似条件下进行试验，同样按应力均匀分布的假设计算出来的。

10. 剪切构件的强度计算，与轴向拉（压）时相同，也是按外力分析、内力分析、强度计算等几个步骤进行的。

思考题

2-1　试辨别图 2-47 所示构件哪些属于轴向拉（压）。

2-2　钢的弹性模量 $E_{钢} = 200\text{GPa}$，铝的弹性模量 $E_{铝} = 70\text{GPa}$。如果用这两种材料制成两根截面积、长度相同的试件进行轴向拉伸试验。当两根试件内的应力相同时，哪根试件的应变大？如加载过程中，保持两根试件的应变相等，哪根试件先断裂？

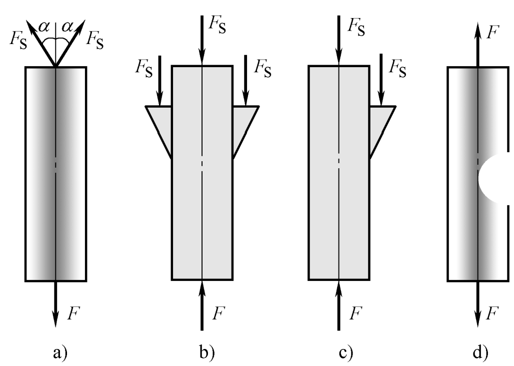


图 2-47　思考题 2-1 图

2-3　两根横截面面积和长度相同、作用力相等但是材料不同直杆受到轴向拉伸作用，两根杆的内力是否相等？两根杆横截面上的正应力是否相等？两根杆的最大位移是否相等？

2-4　指出下列概念的区别：变形与位移、变形与应变、弹性变形与塑性变形、正应力与切应力、破坏应力与许用应力。

2-5　轴向拉伸的等截面直杆内部，仅有正应力而切应力为零。此表述正确吗？

2-6　铸铁做拉伸试验时，由于______作用，试件沿____截面断裂；低碳钢屈服时，在 45°方向上出现滑移线，这是由____引起的。

2-7　低碳钢拉伸时有明显的“四个”阶段，哪个阶段意味着材料已经进入失效？材料失效后是否就不能承受外载荷？

2-8　图 2-48 所示为五种材料，即：黄铜（H62）、低碳钢（Q235）、锰钢（16Mn）、高碳钢（T10A）和镍铬钼钢（40CrNiMo）的应力-应变曲线。其中：材料刚度（弹性模量）最大的材料是____；强度最高的材料是____；塑性性能最好的材料是____。

2-9　低碳钢拉伸试验中所得到的强度极限 σ_b 是否表示在拉伸过程中，材料所承受的最大正应力就是 σ_b？

2-10　对于同一种材料，采用长标距试件和短标距试件，试验所得伸长率是否相同？断面收缩率是否相同？

2-11　塑性材料冷作硬化后，材料的力学性能发生了什么变化？

2-12　材料越容易变形其塑性就越好吗？橡皮筋属于塑性材料还是脆性材料？

2-13　什么是强度条件？按照强度条件进行零件设计，是否就是为了防止材料断裂破坏？

2-14　低碳钢的弹性模量 $E=200\text{GPa}$，比例极限 $\sigma_p=200\text{MPa}$。现有一根低碳钢试件，拉伸产生线应变达到 $\varepsilon=0.002$。是否可以推算杆内的正应力为 $\sigma=E\varepsilon=200\times10^9\text{Pa}\times0.002=400\times10^6\text{Pa}=400\text{MPa}$？

2-15　应力集中是否和材料有关？为什么具有相同尺寸，开有相同圆孔的钢试件和铸铁试件，在相同拉力作用下，铸铁试件在圆孔边先断裂？

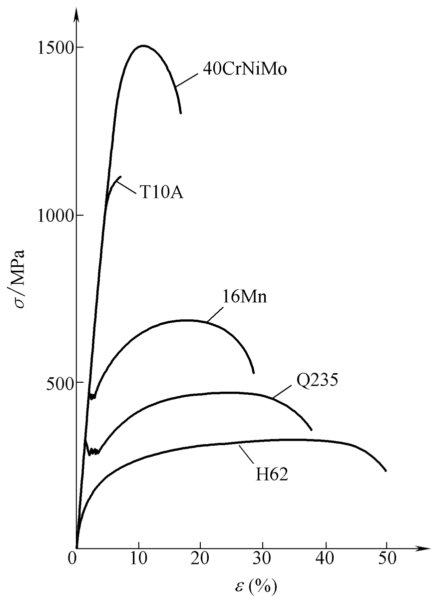


图 2-48　思考题 2-8 图

2-16　如图 2-49 所示，“挤压发生在局部表面，是连接件在接触面上的相互压紧；而压缩是发生在杆件的内部”。判断说法是否正确。

2-17　“两块钢板用两个铆钉连接形成接头，虽然两个铆钉的直径不同，但因塑性材料具有屈服阶段的特点，最终使两个铆钉趋于均衡。因此，在计算铆接强度时，两个铆钉的受力仍可按平均分配”。判断说法是否正确。

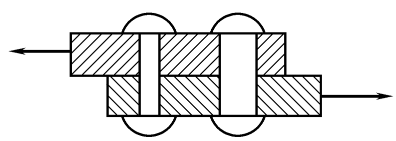


图 2-49　思考题 2-16 图

2-18　“剪断钢板时，所用外力使钢板产生的应力略大于材料的屈服极限即可。”判断说法是否正确。

2-19　图 2-50 所示木榫连接。横截面为矩形，其宽度为 b，连接处长度为 $2t$。则木榫连接处受剪切面的名义切应力等于__________。

2-20　在平板与螺栓之间加一垫片，如图 2-51 所示，在选项：（1）螺栓拉伸；（2）螺栓挤压；（3）螺栓的剪切；（4）平板的挤压的强度。哪个合理正确？

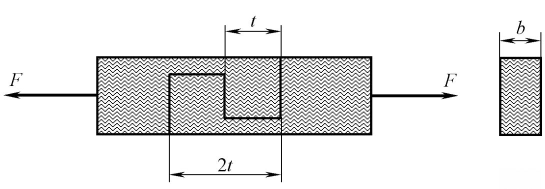


图 2-50　思考题 2-19 图

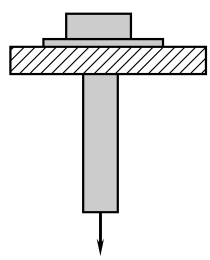


图 2-51　思考题 2-20 图

2-21　图 2-52 所示的结构由铜、钢、铝顺序按竖直方向叠放。顶部施加一个压力。已知：$[\sigma_{bs}]_{钢}$ >

$[\sigma_{bs}]_{铜}>[\sigma_{bs}]_{铝}$，请问应对哪一部分进行挤压强度计算？

2-22　木栓阻止上下两块木板相对滑移，因而在交错的截面上直接受到剪力的作用。但当力 F 逐渐增加时，木栓最后却沿纹理的方向（见图 2-53 中的方向）破裂。解释此现象。

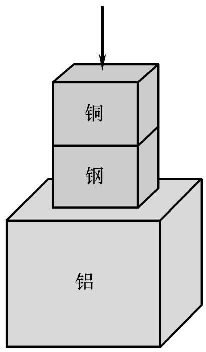


图 2-52　思考题 2-21 图

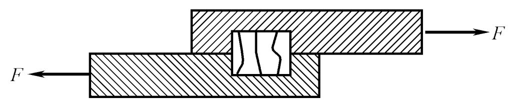


图 2-53　思考题 2-22 图

习　题

2-1　求图 2-54 所示阶梯状直杆横截面 1—1、2—2 和 3—3 上的轴力，并作轴力图。如果横截面面积 $A_1=200\text{mm}^2$，$A_2=300\text{mm}^2$，$A_3=400\text{mm}^2$，求各横截面上的应力。

2-2　图 2-55 所示桁架由圆截面杆 1 与杆 2 组成。在结点 A 承受载荷 $F=80\text{kN}$ 作用。杆 1、杆 2 的直径分别为 $d_1=30\text{mm}$ 和 $d_2=20\text{mm}$，两杆的材料相同，屈服极限 $\sigma_s=320\text{MPa}$，安全因数 $n_s=2.0$。试校核桁架的强度。

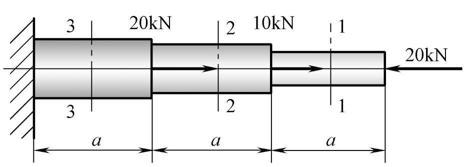


图 2-54　题 2-1 图

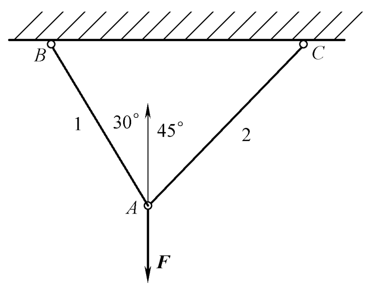


图 2-55　题 2-2 图

2-3　图 2-56 所示硬铝试件，厚度 $b=2\text{mm}$，试验段板宽 $d=20\text{mm}$，标距 $l_0=70\text{mm}$。在轴向拉力 $F=6\text{kN}$ 的作用下，测得试验段伸长 $\Delta l=0.15\text{mm}$，板宽缩短 $\Delta b=0.014\text{mm}$。试计算硬铝的弹性模量 E 与泊松比 μ。

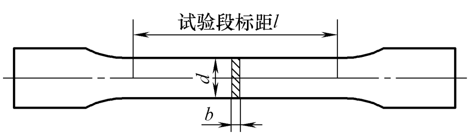


图 2-56　题 2-3 图

2-4　作用图 2-57 所示零件上的拉力 $F=38\text{kN}$，试问零件内最大拉应力发生于哪个横截面上？并求其值。

2-5　图 2-58 所示结构中，已知 BE 杆的横截面为 12mm×25mm 的矩形，当 BE 杆横截面上的最大正应力为 90MPa 时，求此时的 F 值。

2-6　如图 2-59 所示，两侧面受有沿轴线方向均匀分布的载荷（仅在 AC 段），其集度为 $q=10\text{kN/m}$；在 D 端受集中力作用，$F=20\text{kN}$。已知杆横截面面积 $A=2.0\times10^{-4}\text{m}^2$，$l=2\text{m}$，材料的弹性模量 $E=196\text{GPa}$。

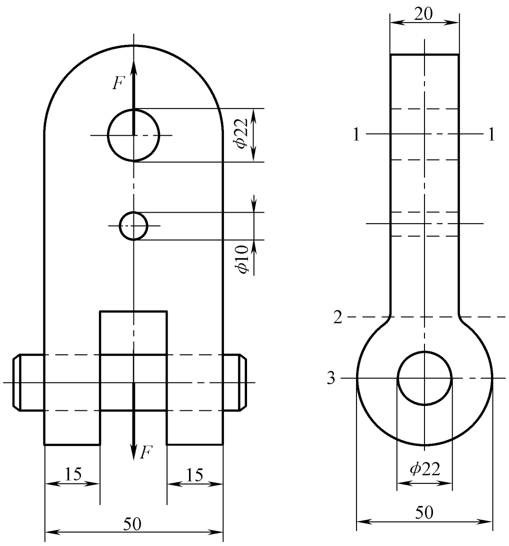


图 2-57　题 2-4 图

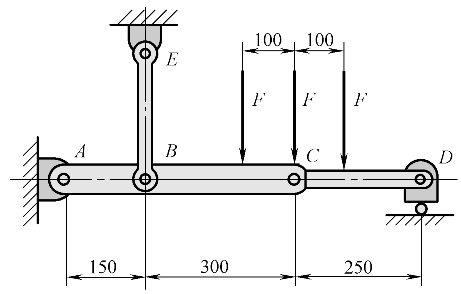


图 2-58　题 2-5 图

求：（1）画出轴力图。

（2）C、D 两截面的铅垂位移。

（3）过 E、B 两点与轴线夹 45°角斜截面上的应力（σ_θ，τ_θ）。

2-7　某金属矿井深 200m，井架高 18m，其提升系统简图如图 2-60 所示。设罐笼及其装载的矿石共重 $G=45\text{kN}$，钢丝绳自重为 $q=23.8\text{N/m}$；钢丝绳横截面面积 $A=2.51\text{cm}^2$，抗拉强度 $\sigma_b=1600\text{MPa}$。设取安全因数 $n=7.5$，试校核钢丝绳的强度。

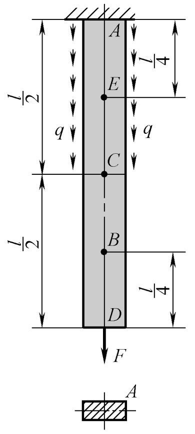


图 2-59　题 2-6 图

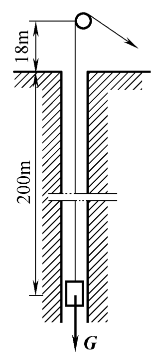


图 2-60　题 2-7 图

2-8　图 2-61 所示一手动压力机，在工件上所加的最大压力为 150kN。已知立柱和螺杆所用材料的屈服点 $\sigma_s=240\text{MPa}$，规定的安全因数 $n=1.5$。

（1）试按强度要求选择立柱的直径 D。

（2）若螺杆的内径 $d=40\text{mm}$，试校核其强度。

2-9　紧装置如图 2-62 所示。现已知工件所受的压紧力为 $F=4000\text{N}$，旋紧螺栓螺纹内径 $d_1=13.8\text{mm}$，固定螺栓内径 $d_2=17.3\text{mm}$。两根螺栓材料相同，其许用应力 $[\sigma]=53.0\text{MPa}$。试校核各螺栓的强度是否安全。

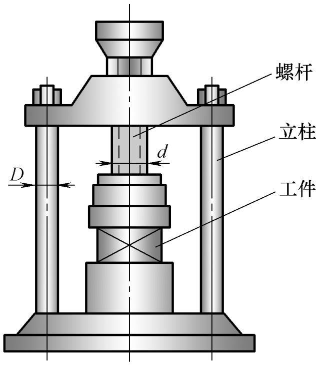


图 2-61 题 2-8 图

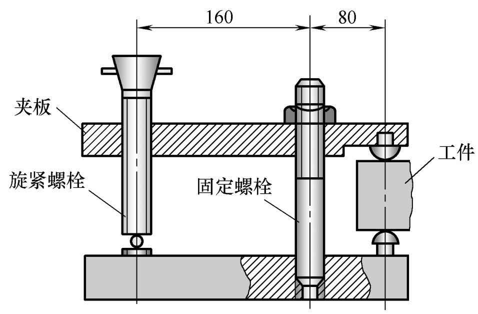


图 2-62 题 2-9 图

2-10 某种材料的圆棒试件，直径 $d=10\text{mm}$，标距 $l_0=100\text{mm}$，由拉伸试验测得其拉伸曲线如图 2-63 所示，其中 d 为断裂点。试求：

（1）此材料的伸长率约为多少？

（2）此材料的强度极限约为多少？

（3）由此材料制成的构件，承受拉力 $F=40\text{kN}$，若取安全因数 $n=1.6$，求构件所需的横截面面积。

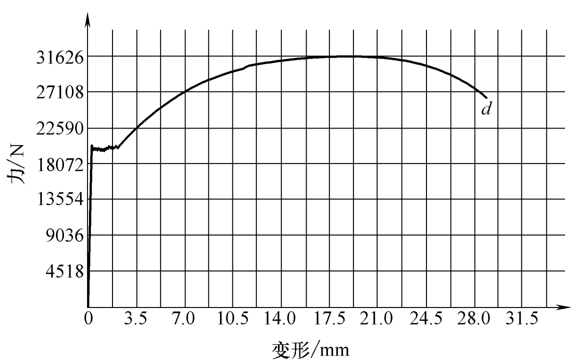


图 2-63 题 2-10 图

2-11 一块厚 10mm、宽 200mm 的旧钢板，其截面被直径 $d=20\text{mm}$ 的圆孔所削弱，圆孔的排列对称于杆的轴线，如图 2-64 所示。现用此钢板承受轴向拉力 $F=200\text{kN}$。如材料的许用应力 $[\sigma]=170\text{MPa}$，试校核钢板的强度。

2-12 图 2-65 所示结构中，AB 为水平放置的刚性杆，1、2、3 杆材料相同，其弹性模量 $E=210\text{GPa}$，已知 $l=1\text{m}$，$A_1=A_2=100\text{mm}^2$，$A_3=150\text{mm}^2$，$F=20\text{kN}$。试求 C 点的水平位移和铅垂位移。

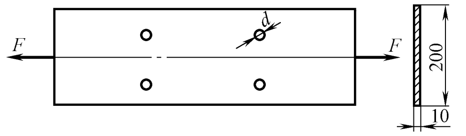


图 2-64 题 2-11 图

2-13 水平刚性横梁 AB 上部由杆 1 和 2 悬挂，下部由铰支座 C 支承，如图 2-66 所示。由于制造误差，使杆 1 的长度做短了 $\delta=1.5\text{mm}$。已知两杆的材料和横截面面积均相同，且 $E_1=E_2=E=200\text{GPa}$，$A_1=A_2=A$。试求装配后两杆的应力。

2-14 图 2-67 所示结构的三根杆件用同一种材料制成。已知三根杆的横截面面积分别为 $A_1=200\text{mm}^2$，$A_2=300\text{mm}^2$，$A_3=400\text{mm}^2$，荷载 $F=40\text{kN}$。试求各杆横截面上的应力。

2-15 求图 2-68 所示结构的许可载荷 $[F]$。已知杆 AD、CE、BF 的横截面面积均为 A，杆材料的许用应力为 $[\sigma]$，梁 AB 可视为刚体。

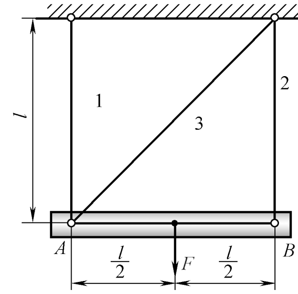


图 2-65　题 2-12 图

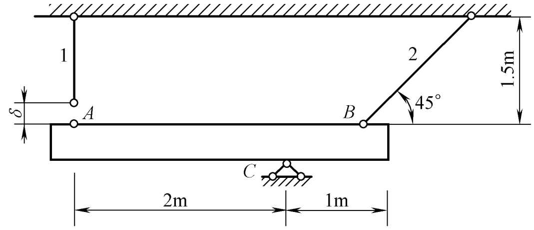


图 2-66　题 2-13 图

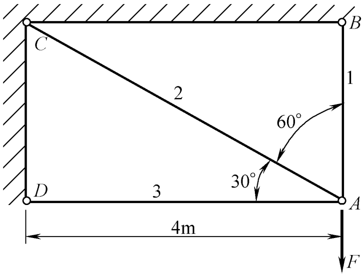


图 2-67　题 2-14 图

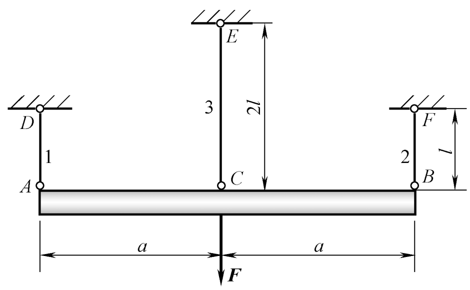


图 2-68　题 2-15 图

2-16　两端固定的阶梯状杆如图 2-69 所示。已知 AC 段和 BD 段的横截面面积为 A，CD 段的横截面面积为 $2A$；该杆材料的弹性模量为 $E=210\text{GPa}$，线胀系数 $\sigma=12\times10^{-6}\text{K}^{-1}$。试求当温度升高 30℃后，该杆各部分产生的应力。

2-17　铜芯与铝壳组成的结构如图 2-70 所示，轴向载荷通过两端刚性板加在结构上。现已知结构总长减少了 0.24mm。求：

（1）所加轴向载荷的大小；

（2）铜芯横截面上的正应力。

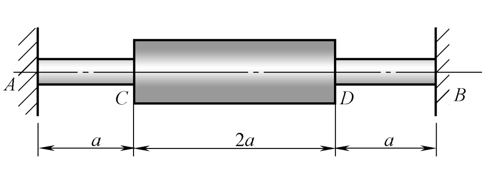


图 2-69　题 2-16 图

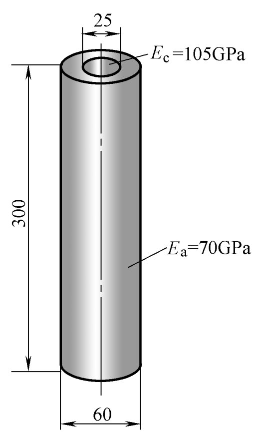


图 2-70　题 2-17 图

2-18　图 2-71 所示为一中间切槽的钢板，以螺钉固定于刚性平面上，在 C 处作用一力 $F=5000\text{N}$，有关尺寸如图所示。试求此钢板的最大应力。

2-19　夹剪如图 2-72 所示。销子 C 的直径 $d=5\text{mm}$。当加力 $F=0.2\text{kN}$，剪直径与销子直径相同的铜丝

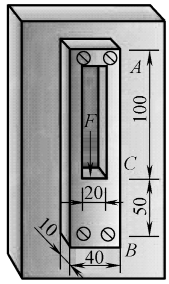


图 2-71　题 2-18 图

时，求铜丝与销子横截面的平均切应力。已知 $a=30\text{mm}$，$b=150\text{mm}$。

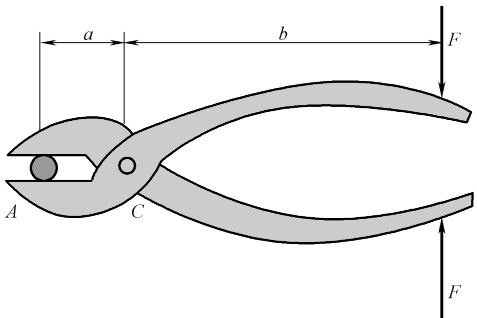


图 2-72　题 2-19 图

2-20　图 2-73 所示摇臂，承受载荷 F_1 与 F_2 作用。已知载荷 $F_1=50\text{kN}$，$F_2=35.4\text{kN}$，许用切应力 $[\tau]=100\text{MPa}$，许用挤压应力 $[\sigma_{bs}]=240\text{MPa}$。试确定轴销 B 的直径 d。

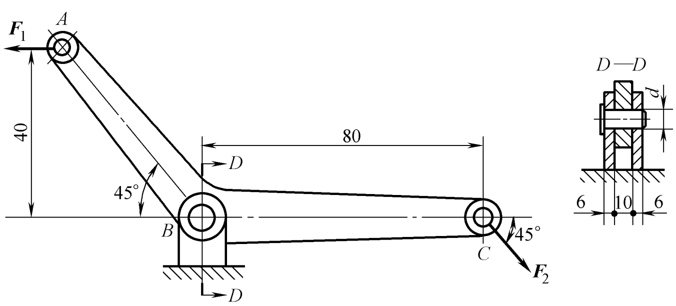


图 2-73　题 2-20 图

2-21　木梁由柱支撑如图 2-74 所示，今测得柱中的轴向压力为 $F=75\text{kN}$，若已知木梁所能承受的许用挤压应力 $[\sigma_{bs}]=3.0\text{MPa}$。确定柱与木梁之间垫板的尺寸。

2-22　木构件 A 和 B 由两片层合板用胶黏接在一起，承受轴向载荷作用，如图 2-75 所示。已知 A 和 B 的空隙为 8mm；板宽 $b=100\text{mm}$；胶层的许用切应力 $[\tau]=800\text{kPa}$。确定层合板的长度 l。

2-23　水轮发电机组的卡环尺寸如图 2-76 所示。已知轴向载荷 $F=1450\text{kN}$，卡环材料的许用切应力 $[\tau]=80\text{MPa}$，许用挤压应力 $[\sigma_{bs}]=150\text{MPa}$。试对卡环进行强度校核。

2-24　拉力 $F=80\text{kN}$ 的螺栓连接如图 2-77 所示。已知 $b=80\text{mm}$，$t=10\text{mm}$，$d=22\text{mm}$，螺栓的许用切应力 $[\tau]=130\text{MPa}$，钢板的许用挤压应力 $[\sigma_{bs}]=300\text{MPa}$，许用拉应力 $[\sigma]=170\text{MPa}$。试校核该接头的强度。

2-25　一托架如图 2-78 所示。已知外力 $F=35\text{kN}$，铆钉的直径 $d=20\text{mm}$，铆钉都受单剪。求最危险的铆钉横截面上切应力的数值及方向。

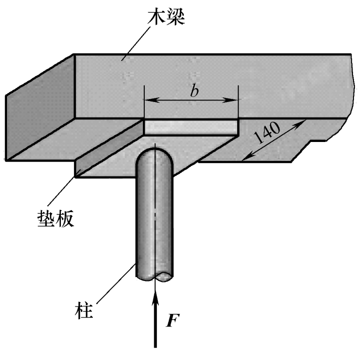


图 2-74　题 2-21 图

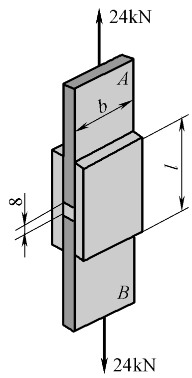


图 2-75　题 2-22 图

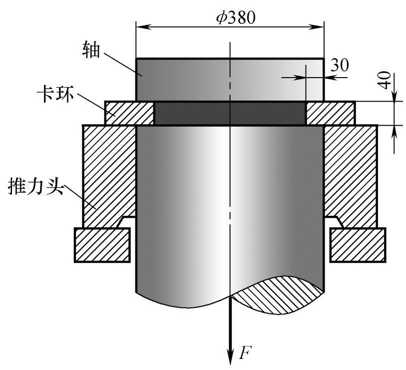


图 2-76　题 2-23 图

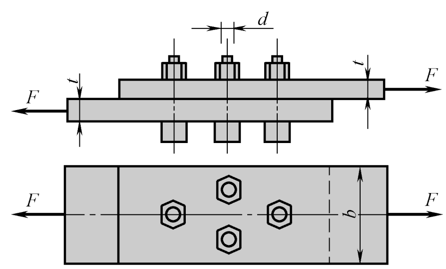


图 2-77　题 2-24 图

2-26　销钉式安全离合器如图 2-79 所示，允许传递的外力偶矩 $M=30\text{kN}\cdot\text{cm}$，销钉材料的剪切强度极限 $\tau_b=360\text{MPa}$，轴的直径 $D=30\text{mm}$，为保证 $M>30000\text{N}\cdot\text{cm}$ 时销钉被剪断，求销钉的直径 d。

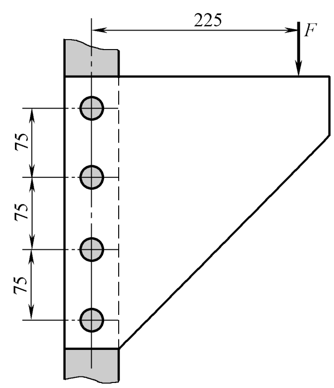


图 2-78　题 2-25 图

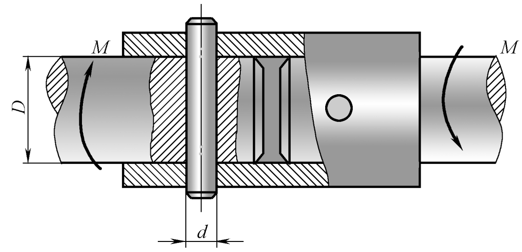


图 2-79　题 2-26 图

2-27　图 2-80 所示为测定剪切强度极限的试验装置。若已知低碳钢试件的直径 $d=1\text{cm}$，剪断试件时的外力 $F=50.2\text{kN}$，问材料的剪切强度极限为多少？

2-28　一冶炼厂使用的高压泵安全阀如图 2-81 所示。要求当活塞下高压液体的压强达 $p=3.4\text{MPa}$ 时，使安全销沿 1—1 和 2—2 两截面剪断，从而使高压液体流出，以保证泵的安全。已知活塞直径 $D=5.2\text{cm}$，安全销采用 15 钢，其剪切强度极限 $\tau_b=320\text{MPa}$，试确定安全销的直径 d。

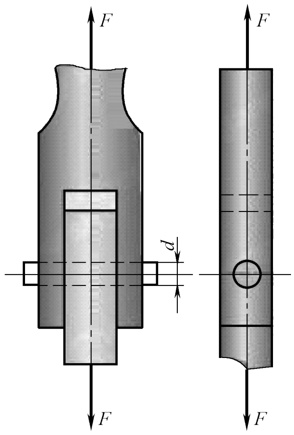


图 2-80　题 2-27 图

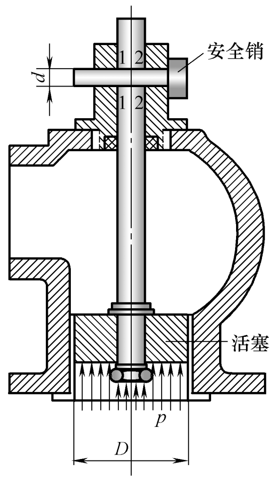


图 2-81　题 2-28 图

3

第3章 扭转

内容梗概：通过受扭薄壁圆筒纯剪切单元体应力分析，引出剪切互等定理及剪切胡克定律。研究圆轴扭转，必须先用截面法求得任意截面上的扭矩，作扭矩图；然后从变形实验观察、物理关系和静力学三方面着手，得到切应变分布规律和应力与变形计算公式。进而进行圆轴强度与刚度计算，其中惯性矩 I_p 与抗扭截面系数 W_t 是必须使用的几何参数。

3.1 扭转及其工程实例

如图 3-1 所示的攻丝丝锥、图 3-2 所示的桥式起重机的传动轴以及齿轮轴等都是承受扭转变形的典型构件。工程上承受扭转变形的杆称为轴。扭转有如下特点：

（1）受力特点　在杆件两端垂直于杆轴线的平面内作用一对大小相等、方向相反的外力偶——扭转力偶。其相应内力分量称为扭矩。

（2）变形特点　任意两个横截面绕轴线发生相对转动，称为扭转变形。

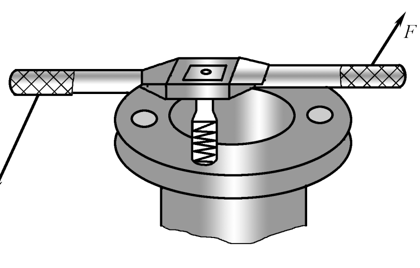


图 3-1　攻丝丝锥

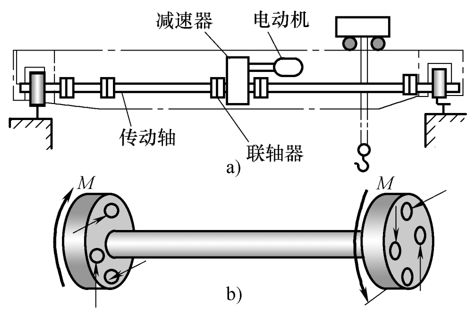


图 3-2　桥式起重机的传动轴

3.2 扭矩和扭矩图

1. 外力偶矩 M

如图 3-3 所示的传动机构，通常电动机所提供的外力偶矩 M 不是直接给出的，而是通过轴所传递的功率 P（单位为 kW）和转速 n（单位为 r/min）计算得到的。

设轴在外力偶 M 作用下匀速转动，在 1s 内所转动的角度为 $\varphi=2\pi n/60$（单位为 rad），

则力偶 M 做功为 $W=M\cdot 2\pi n/60$(N·m)。P 的功率相当于在 1s 内做功 $W=1000P$(N·m)。由于二者所做功应该相等，则有 $1000P=M\cdot 2\pi n/60$。由此便得

$$M=9550\frac{P}{n}\ (\text{N}\cdot\text{m}) \tag{3-1}$$

式中，P 为传递功率（kW）；n 为转速（r/min 或 rpm）。

2. 扭矩 T

求出外力偶矩 M 后，可进而用截面法求扭转内力——扭矩。如图 3-4 所示圆轴，由 $\sum M_x=0$，从而可得 A—A 截面上扭矩 T 为

$$T-M=0,\quad T=M$$

T 称为截面 A—A 上的扭矩；扭矩的正负号规定为：按右手螺旋法则，T 矢量离开截面为正，指向截面为负。或矢量与横截面外法线方向一致为正，反之为负。

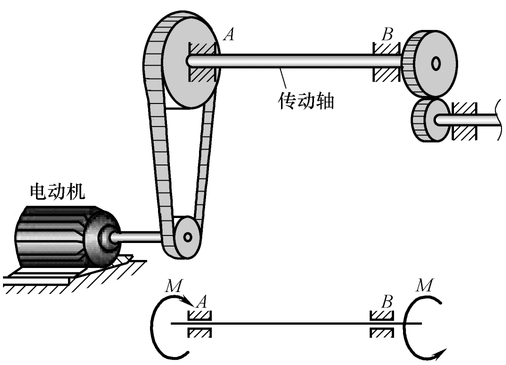


图 3-3　外力偶矩的计算

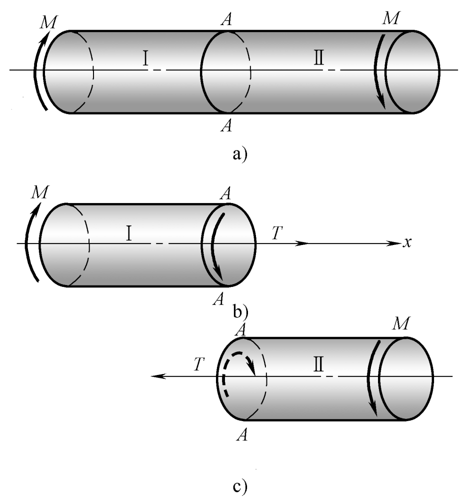


图 3-4　扭矩

例 3-1　如图 3-5a 所示的传动轴，主动轮输入的功率为 $P_1=500\text{kW}$，三个从动轮输出的功率分别为 $P_2=P_3=150\text{kW}$，$P_4=200\text{kW}$，轴的转速为 $n=300\text{rpm}$。试做出轴的扭矩图。

解：传动轴的计算简图如图 3-5b 所示，按式（3-1）计算外力偶矩：

$$M_{e1}=9550\frac{P}{n}=\left(9550\times\frac{500}{300}\right)\text{N}\cdot\text{m}$$

$$=1.59\times10^4\text{N}\cdot\text{m}=15.9\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{e2}=M_{e3}=\left(9550\times\frac{150}{300}\right)\text{N}\cdot\text{m}$$

$$=4.78\times10^3\text{N}\cdot\text{m}=4.78\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{e4}=\left(9550\times\frac{220}{300}\right)\text{N}\cdot\text{m}$$

$$=6.37\times10^3\text{N}\cdot\text{m}=6.37\text{kN}\cdot\text{m}$$

用截面法即可计算出各段的扭矩：

（1）AB 段：在截面Ⅰ—Ⅰ处将轴截开，取左段为隔离体，如图 3-5c 所示，由平衡条件

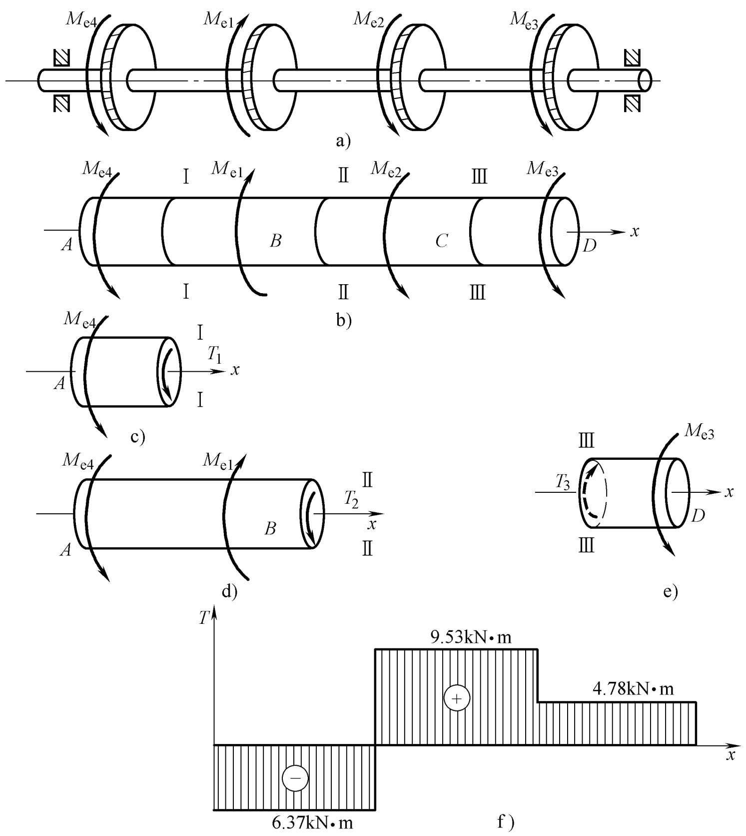


图 3-5　传动轴受力分析与扭矩图

$$\sum M_x = 0, T_1 + M_{e4} = 0$$

得

$$T_1 = -M_{e4} = -6.37\text{kN} \cdot \text{m}$$

（2）BC 段：在截面Ⅱ—Ⅱ处将轴截开，取左段为隔离体，如图 3-5d 所示，由平衡条件

$$\sum M_x = 0, T_2 + M_{e4} - M_{e1} = 0$$

得

$$T_2 = -M_{e4} + M_{e1} = -6.37\text{kN} \cdot \text{m} + 15.9\text{kN} \cdot \text{m} = 9.53\text{kN} \cdot \text{m}$$

（3）CD 段：在截面Ⅲ—Ⅲ处将轴截开，取右段为隔离体，如图 3-5e 所示，由平衡条件

$$\sum M_x = 0, T_3 - M_{e3} = 0$$

得

$$T_3 = M_{e3} = 4.78\text{kN} \cdot \text{m}$$

其扭矩图如图 3-5f 所示，由图可知，最大扭矩在 BC 段内，其值等于为 9.53kN · m。

对上述传动轴，若把主动轮 B 和轮 A 交换位置，则轴的扭矩图如图 3-6 所示。这时，轴的最大扭矩为 15.9kN · m。显然单从受力角度，图 3-5 所示轮子布局比图 3-6 合理。

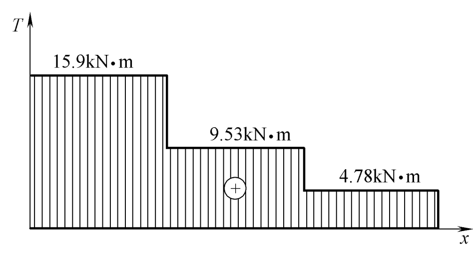


图 3-6　传动轴交换外力偶后的扭矩图

3.3 薄壁圆筒的扭转

当空心圆筒的壁厚 t 与平均直径 D（即 $2r$）之比 $t/D\leqslant 1/20$ 时称为薄壁圆筒。

1. 切应力与切应力互等定理

若在薄壁圆筒的外表面画上一系列互相平行的纵向直线和横向圆周线，将其分成一个个小方格，其中代表性的一个小方格 $abcd$ 如图 3-7a 所示。这时使筒在外力偶 M 作用下扭转，扭转后相邻圆周线绕轴线相对转过一微小转角。纵线均倾斜一微小倾角 γ 从而使方格 $abcd$ 变成菱形 $a'b'c'd'$（见图 3-7b），但圆筒沿轴线及周线的长度都没有变化。这表明，当薄壁圆筒扭转时，其横截面和包含轴线的纵向截面上都没有正应力，横截面上只有切于截面的切应力 τ，因为筒壁的厚度 t 很小，可以认为沿筒壁厚度切应力不变，又根据圆截面的轴对称性，横截面上的切应力 τ 沿圆环处处相等。根据如图 3-7c 所示部分的平衡方程 $\sum M_x=0$，有 $M=2\pi rt\cdot\tau\cdot r$。整理后得到

$$\tau=\frac{M}{2\pi r^2 t} \tag{3-2}$$

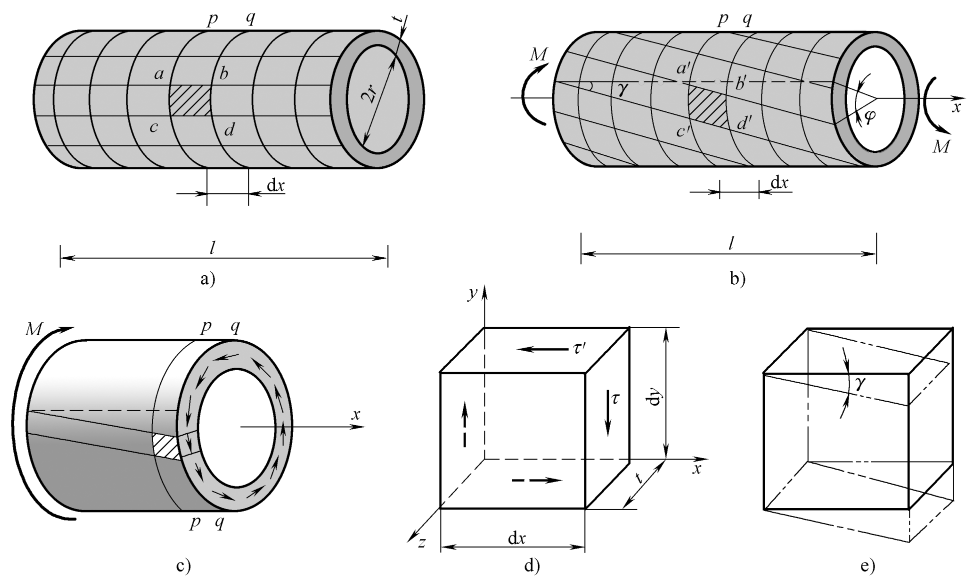


图 3-7　薄壁圆筒扭转

图 3-7d 是从薄壁圆筒上取出的相应于 3-7a 上小方块 $abcd$ 的单元体，它的厚度为壁厚 t，宽度和高度分别为 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$。当薄壁圆筒受扭时，此单元体分别相应于 p-p、q-q 圆周面的左、右侧面上有切应力 τ，因此在这两个侧面上有剪力 $\tau t\mathrm{d}y$，而且这两个侧面上剪力大小相等而方向相反，形成一个力偶，其力偶矩为 $(\tau t\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$。为了平衡这一力偶，上、下水平面上也必须有一对切应力 τ'作用（考虑到 y 方向力平衡条件，这一对切应力也应大小相等，方向相反）。对整个单元体，必须满足 $\sum M_z=0$，即

$$(\tau t\cdot\mathrm{d}y)\mathrm{d}x=(\tau' t\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$$

所以

$$\tau = \tau' \tag{3-3}$$

式（3-3）表明，在一对相互垂直的微面上，垂直于交线的切应力应大小相等，方向共同指向或背离交线。这就是切应力互等定理。图 3-7d 所示单元体称纯剪切单元体。

2. 切应变与剪切胡克定律

与图 3-7b 中小方格（平行四边形）相对应，图 3-7e 中单元体的相对两侧面发生微小的相对错动，使原来互相垂直的两个棱边的夹角改变了一个微量 γ，此直角的改变量称为切应变或角应变。如图 3-7b 所示，若 φ 为圆筒两端的相对扭转角，l 为圆筒的长度，则切应变 γ 为

$$\gamma = \frac{r\varphi}{l} \tag{3-4}$$

薄圆筒扭转试验表明，在弹性范围内，切应变 γ 与切应力 τ 成正比，即

$$\tau = G\gamma \tag{3-5}$$

式（3-5）为剪切胡克定律；G 称为材料的切变模量，单位为 GPa。

对各向同性材料，弹性常数 E、μ、G 三者有关系

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{3-6}$$

3.4 圆轴扭转时的应力和强度条件

1. 平面假设及变形几何关系

图 3-8 所示为受力偶 M 作用的圆轴扭转问题，与薄圆筒相似，预先用一系列平行的纵线与圆周线将圆轴表面分成一系列矩形方格。圆轴受扭后，可以观察到表面变形具有以下规律：

1）各圆周线绕轴线相对转动一微小转角，但圆周线大小、形状及相互间距不变；

2）由于是小变形，各纵向线平行地倾斜一个微小角度 γ，仍保持直线，因而各矩形方格变形后成为平行四边形。

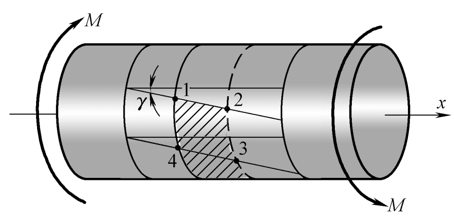


图 3-8　圆轴受力偶 M 作用时的扭转变形

上述观察到的变形规律，可以认为是圆轴扭转变形在其表面的反映。采用由表及里的逻辑推理方法，可以推测圆轴内部的变形情况，得出平面假设：变形前横截面为圆形平面，变形后仍为圆形平面，只是各截面绕轴线相对“刚性地”转了一个角度，各截面相互间距不变。

据此假设得知，横截面上没有正应力，只有切应力，其方向与所在半径垂直并与扭矩转向保持一致。对于圆截面杆扭转，理论和试验均证明平面假设完全成立。

为了得到圆轴扭转时的横截面切应力分布规律，需要先从试验结果得出变形几何关系。从变形后的圆轴截取长度 dx 的微分段（图 3-9a），则两横截面上互相平行的线段$\overline{14}$，$\overline{23}$相对

转动了扭转角 $\mathrm{d}\varphi$，纵线$\overline{12}$倾斜小角度 γ 成为$\overline{12'}$。再从图 3-9a 取出如图 3-9b 所示的楔形微元体，考察在径向长度为 ρ 处的纵线$\overline{lm}$。根据平面假设，转过 $\mathrm{d}\varphi$ 后成为 lm'（其相应倾角为 γ_ρ，见图 3-9b），由于是小变形，从图 3-9b 可知：$\overline{mm'}=\gamma_\rho \mathrm{d}x=\rho \mathrm{d}\varphi$。于是

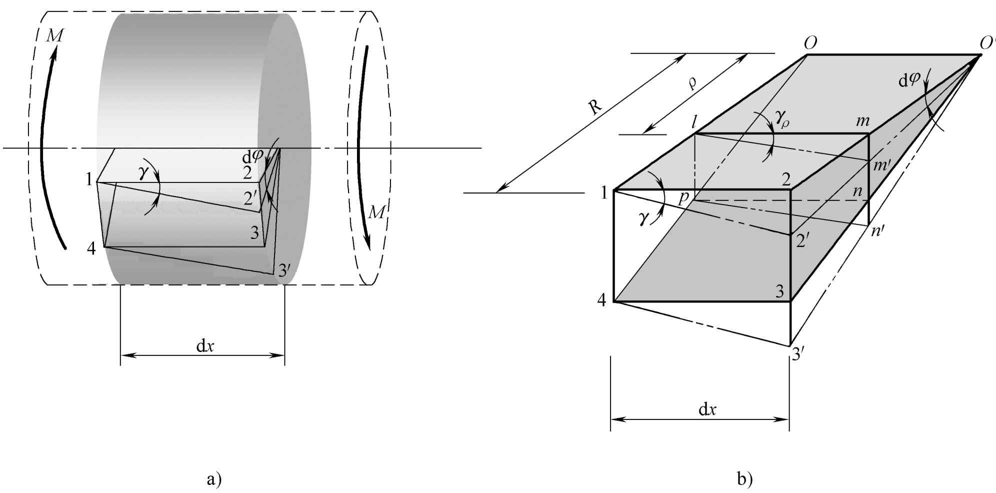


图 3-9　圆轴受力偶 M 作用时，横截面上变形示意图

$$\gamma_\rho=\rho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \tag{3-7}$$

对于半径为 R 的圆轴表面（见图 3-9b），则为

$$\gamma=R\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

2. 物理关系

由剪切胡克定律和式（3-7）得

$$\tau_\rho=\gamma_\rho G=G\rho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \tag{3-8}$$

这表明横截面上任意点的切应力 τ_ρ 与该点到圆心的距离 ρ 成正比，即

$$\tau_\rho \propto \rho$$

当 $\rho=0$，$\tau_\rho=0$；当 $\rho=R$，τ_ρ 取最大值。由切应力互等定理，则在径向截面和横截面上，沿半径切应力的分布如图 3-10 所示。

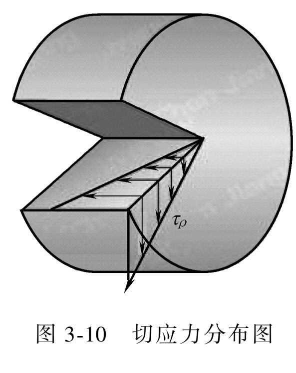


图 3-10　切应力分布图

3. 静力学关系

在图 3-11 所示圆轴的横截面内，任取微分面积 $\mathrm{d}A$，其上切应力的合力对于横截面中心的力矩为 $\mathrm{d}M=\rho\tau_\rho \mathrm{d}A=\tau_\rho 2\pi\rho^2 \mathrm{d}\rho$，总力矩 $M=\int_A \rho\tau_\rho \mathrm{d}A$。也即横截面上切应力对于截面中心的总合力矩等效于该轴横截面上的扭矩。因此有

$$T = M = \int_A \rho\tau_\rho \mathrm{d}A = \int_A \rho^2 G \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}A = G\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\int_A \rho^2 \mathrm{d}A$$

令

$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A \tag{3-9}$$

此处 $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x$ 为单位长度上的相对扭角，对同一横截面，它应为不变量。I_p 为几何性质量，只与圆截面的尺寸有关，称为极惯性矩，单位为 m^4。则 $T=G\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}I_p$ 或

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\frac{T}{GI_p} \tag{3-10}$$

将式（3-10）代回式（3-8），得

$$\tau_\rho=\frac{T\rho}{I_p} \tag{3-11}$$

则在圆截面边缘上，ρ 为最大值 R 时，得最大切应力为

$$\tau_{\max}=\frac{TR}{I_p}=\frac{T}{W_t} \tag{3-12}$$

此处定义

$$W_t=\frac{I_p}{R} \tag{3-13}$$

W_t 称为抗扭截面系数，单位为 m^3。由此得圆轴扭转强度条件

$$\tau_{\max}=\frac{T}{W_t}\leqslant[\tau] \tag{3-14}$$

注意到此处许用切应力［τ］不同于剪切件计算中的剪切许用应力。它由危险切应力 τ_0 除以安全因数 n 得到，与拉伸时相类似：

$$[\tau]=\frac{\tau_0}{n}=\begin{cases}\tau_s/n_s & \text{塑性材料}\\ \tau_b/n_b & \text{脆性材料}\end{cases}$$

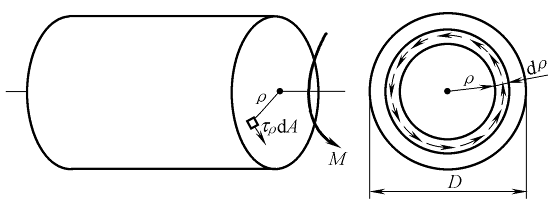


图 3-11　静力等效关系

τ_s、τ_b 由相应材料的扭转破坏试验获得，大量试验数据表明，它与相同材料的拉伸强度指标有如下统计关系：

塑性材料　　$\tau_s=(0.5\sim0.6)\sigma_s$

脆性材料　　$\tau_b=(0.8\sim1.0)\sigma_b$

4. I_p、W_t 计算

对实心圆轴　$\mathrm{d}A=2\pi\rho\cdot\mathrm{d}\rho$

$$\begin{cases}I_p=\int_A \rho^2\mathrm{d}A=\int_0^{\frac{D}{2}}\rho^2\cdot 2\pi\rho\mathrm{d}\rho=\dfrac{\pi D^4}{32}\\ W_t=\dfrac{I_p}{\dfrac{D}{2}}=\dfrac{\pi D^3}{16}\end{cases} \tag{3-15}$$

对空心圆轴

$$\begin{cases} I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \rho^2 \cdot 2\pi\rho \mathrm{d}\rho = \dfrac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = \dfrac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4) \\ W_t = \dfrac{I_p}{D/2} = \dfrac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} = \dfrac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4) \end{cases} \tag{3-16}$$

其中 $\alpha = d/D$ 为内外径之比。

例 3-2 AB 轴传递的功率为 $P=7.5\text{kW}$，转速 $n=360\text{rpm}$。如图 3-12 所示，轴 AC 段为实心圆截面，CB 段为空心圆截面。已知 $D=3\text{cm}$，$d=2\text{cm}$。试计算 AC 以及 CB 段的最大与最小切应力。

解：（1）计算扭矩

轴所受的外力偶矩为

$$M = 9550\frac{P}{n} = 9550\frac{7.5}{360}\text{N}\cdot\text{m} = 199\text{N}\cdot\text{m}$$

由截面法

$$T = M = 199\text{N}\cdot\text{m}$$

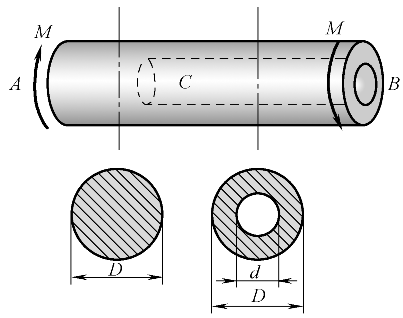


图 3-12 圆轴受外力偶 M 作用

（2）计算极惯性矩

AC 段和 CB 段轴横截面的极惯性矩分别为

$$I_{p1} = \frac{\pi D^4}{32} = 7.95\text{cm}^4$$

$$I_{p2} = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) = 6.38\text{cm}^4$$

（3）计算应力

AC 段轴在横截面边缘处的切应力为

$$\tau_{\max}^{AC} = \tau_{外}^{AC} = \frac{T}{I_{p1}}\cdot\frac{D}{2} = 37.5\times10^6\text{Pa} = 37.5\text{MPa}$$

$$\tau_{\min}^{AC} = 0$$

CB 段轴横截面内、外边缘处的切应力分别为

$$\tau_{\min}^{CB} = \tau_{内}^{CB} = \frac{T}{I_{p2}}\cdot\frac{d}{2} = 31.2\times10^6\text{Pa} = 31.2\text{MPa}$$

$$\tau_{\max}^{CB} = \tau_{外}^{CB} = \frac{T}{I_{p2}}\cdot\frac{D}{2} = 46.8\times10^6\text{Pa} = 46.8\text{MPa}$$

3.5 圆轴扭转时的变形及刚度条件

扭转角是指受扭构件上两个横截面绕轴线的相对转角。对于圆轴，由式（3-10）

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{T\mathrm{d}x}{GI_p}$$

所以

$$\varphi = \int_l \mathrm{d}\varphi = \int_0^l \frac{T}{GI_p}\mathrm{d}x = \frac{Tl}{GI_p}\ (\mathrm{rad}) \tag{3-17}$$

式中，GI_p 称为圆轴的抗扭刚度，它为切变模量与极惯性矩的乘积。GI_p 越大，则扭转角 φ 越小。令 $\varphi=\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x$，为单位长度相对扭角，则有 $\varphi=T/GI_p$，则扭转的刚度条件为

$$\varphi_{\max} = \frac{T}{GI_p} \leqslant [\varphi]\ (\mathrm{rad/m}) \tag{3-18}$$

或

$$\varphi_{\max} = \frac{T}{GI_p} \times \frac{180}{\pi} \leqslant [\varphi]\ (°/\mathrm{m}) \tag{3-19}$$

例 3-3　如图 3-13 所示的传动轴，$n=300\mathrm{rpm}$，$P_1=500\mathrm{kW}$，$P_2=200\mathrm{kW}$，$P_3=300\mathrm{kW}$。已知 $[\tau]=70\mathrm{MPa}$，$[\varphi]=1°/\mathrm{m}$，$G=80\mathrm{GPa}$。试确定 AB 和 BC 段直径。

解：（1）计算外力偶矩

$$M_A = 9550\frac{P_1}{n} = 15.9\mathrm{kN\cdot m}$$

$$M_B = 9550\frac{P_2}{n} = 6.4\mathrm{kN\cdot m}$$

$$M_C = 9550\frac{P_3}{n} = 9.5\mathrm{kN\cdot m}$$

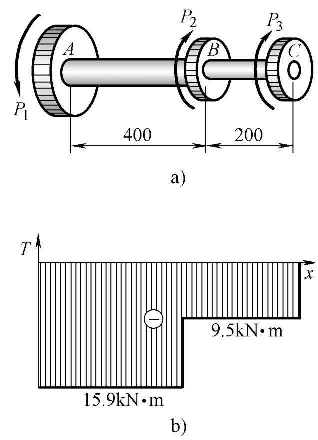


图 3-13　圆轴受外力偶作用的扭矩图

作扭矩 T 图，如图 3-13b 所示。

（2）计算直径 d

AB 段：由圆轴扭转强度条件，

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t} = \frac{16T_{\max}}{\pi d_1^3} \leqslant [\tau]$$

$$d_1 \geqslant \sqrt[3]{\frac{16T_{\max}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16\times15.9\times10^3}{\pi\times70\times10^6}}\mathrm{m} \approx 0.105\mathrm{m} = 105\mathrm{mm}$$

由刚度条件

$$\varphi = \frac{T_{\max}}{G\dfrac{\pi d_1^4}{32}} \times \frac{180°}{\pi} \leqslant [\varphi]$$

$$d_1 \geqslant \sqrt[4]{\frac{32T_{\max}\times180}{G\pi^2[\varphi]}} = \sqrt[4]{\frac{32\times15.9\times10^3\times180}{80\times10^9\times\pi^2\times1}}\mathrm{m} = 0.104\mathrm{m} = 104\mathrm{mm}$$

取　$d_1=105\mathrm{mm}$。

BC 段：同理，由扭转强度条件得 $d_2 \geqslant 89\mathrm{mm}$；由扭转刚度条件得 $d_2 \geqslant 91\mathrm{mm}$。

取 $d_2=91\mathrm{mm}$。

3.6 圆柱形密圈螺旋弹簧的应力和变形计算

螺旋弹簧如图 3-14a 所示。当螺旋角 $\alpha<5°$时，可近似认为簧丝的横截面与弹簧轴线在同一平面内，一般将这种弹簧称为密圈螺旋弹簧。

1. 弹簧丝横截面上的应力

如图 3-14b 所示以簧丝的任意横截面取出密圈弹簧的上部分为研究对象，根据平衡方程，横截面上剪力 $F_S=F$，扭矩 $T=FD/2$。

由 F_S 引起的切应力 $\tau_1=\dfrac{F_S}{A}=\dfrac{4F}{\pi d^2}$，而且认为 τ_1 均匀分布于横截面上（见图 3-14c）；若将簧丝的受力视为直杆的纯扭转，由 T 引起的最大切应力为（见图 3-14d）

$$\tau_2=\frac{T}{W_t}=\frac{16T}{\pi d^3}=\frac{8FD}{\pi d^3}$$

所以在簧丝横截面内侧 A 点有

$$\tau_{max}=\tau_1+\tau_2=\frac{8FD}{\pi d^3}\left(1+\frac{d}{2D}\right)=k\,\frac{8FD}{\pi d^3} \tag{3-20}$$

其中

$$k=1+\frac{d}{2D} \tag{3-21}$$

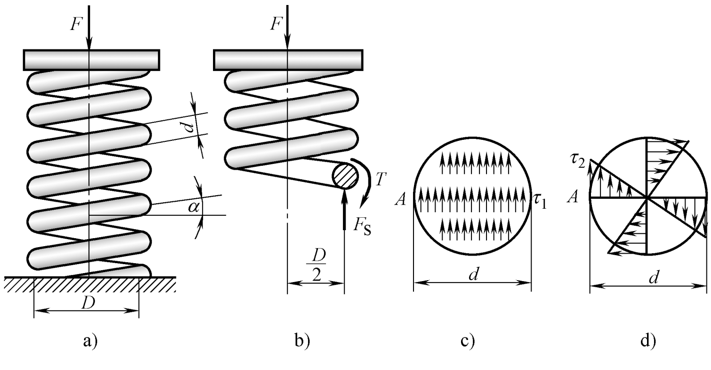


图 3-14　螺旋弹簧

当 $d/D<1/10$，略去切应力 τ_1所引起的误差 $\tau<5\%$，可用近似式

$$\tau_{max}=\frac{8FD}{\pi d^3} \tag{3-22}$$

对某些工程实际问题，如机车车辆中的重弹簧，d/D 的值并不太小，此时不仅要考虑剪力，还要考虑弹簧丝曲率的影响，进一步理论分析和修正系数 k 的选取可见有关参考书。

密圈弹簧丝的强度条件是

$$\tau_{max}\leqslant[\tau] \tag{3-23}$$

式中，$[\tau]$ 为弹簧丝材料的许用切应力。

2. 弹簧的变形

设弹簧在轴向压力（或拉力）作用下，轴线方向的总缩短（或伸长）量为 λ，这是弹簧整体的压缩（或拉伸）变形。如图 3-15a、b 所示。如认为簧丝是纯扭转，工程计算采用

$$\lambda=\frac{8FD^3n}{Gd^4}=\frac{64FR^3n}{Gd^4} \tag{3-24}$$

式中，$R=D/2$ 是弹簧圈的平均半径；n 是弹簧有效圈数。若引入记号 $c=\dfrac{Gd^4}{8D^3n}$

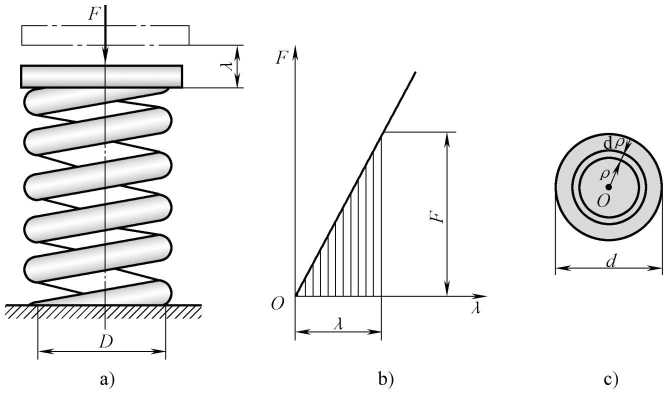


图 3-15　弹簧变形

则式（3-24）可写成

$$\lambda=\frac{F}{c} \tag{3-25}$$

式中，c 代表弹簧抵抗变形的能力，称为弹簧刚度。可见 λ 与 c 成反比，c 越大则 λ 越小。

例 3-4　某柴油机的气阀弹簧，簧圈平均半径 $R=59.5\text{mm}$，簧丝直径 $d=14\text{mm}$，有效圈数 $n=5$。$G=80\text{GPa}$。弹簧工作时受 $F_{max}=3\text{kN}$，求此弹簧的最大压缩量与最大切应力（略去弹簧曲率的影响）。

解：由变形公式求最大压缩量

$$\lambda=\frac{64FR^3n}{Gd^4}=\frac{64\times2.5\times10^3(59.5\times10^{-3})^3\times5}{80\times10^9(14\times10^{-3})^4}\text{m}$$
$$=54.8\times10^{-3}\text{m}=54.8\text{mm}$$

考虑剪切力时

$$\tau_{max}=\left(1+\frac{d}{2D}\right)\frac{8FD}{\pi d^3}=\left(1+\frac{14}{4\times59.5}\right)\frac{8\times2.5\times10^3\times2\times59.5\times10^{-3}}{\pi(14\times10^{-3})^3}\text{Pa}$$
$$=1.059\times276\text{MPa}=292\text{MPa}$$

不考虑剪力影响时 $\tau'_{max}=276MPa$，相差 5.9%。由于 $\dfrac{d}{D}=11.8>\dfrac{1}{10}$，还应考虑曲率影响，此处从略。

3.7 非圆截面杆的扭转问题

工程上受扭转的杆件除常见的圆轴外，还有其他形状的截面，下面简要介绍矩形截面，

如图 3-16a 所示。

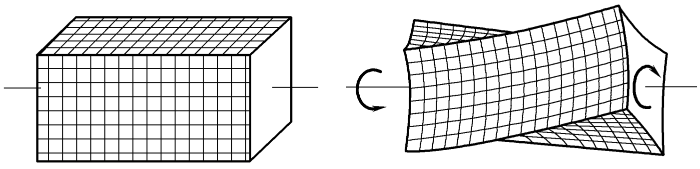


图 3-16　矩形截面杆扭转

杆件受扭转力偶作用发生变形，变形后其横截面将不再保持平面，而发生“翘曲”（见图 3-16b）。扭转时，若各横截面翘曲是自由的，不受约束，此时相邻横截面的翘曲处处相同，杆件轴向纤维的长度无变化，因而横截面上，只有切应力没有正应力，这种扭转称为自由扭转。此时横截面上切应力规律如下（见图 13-17）：

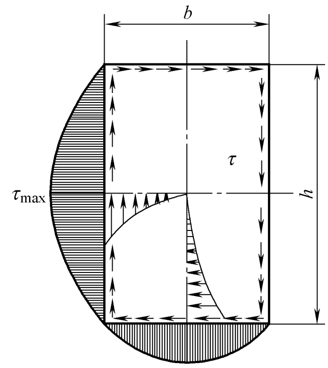


图 3-17　矩形截面轴扭转时横截面切应力分布

1）边缘各点的切应力 τ 与周边相切，沿周边方向形成剪流。

2）τ_{max}发生在矩形长边中点处，大小为

$$\tau_{max}=\frac{T}{W_k}\ ,\ W_k=\alpha hb^2 \qquad (3\text{-}26)$$

次大切应力发生在短边中点，大小为

$$\tau_1=\nu\tau_{max}$$

四个角点处切应力 $\tau=0$。

3）杆件两端相对扭转角 φ 为

$$\varphi=\frac{Tl}{GI_k}\ ,\ I_k=\beta hb^2 \qquad (3\text{-}27)$$

其中系数 α、β、ν 与$\dfrac{h}{b}$有关，可查表（见有关参考书）。

注意到：对非圆截面扭转，平面假设不再成立。上面计算公式是将弹性力学的分析结果写成圆轴公式形式。

当 $h/b>10$ 时，截面成为狭长矩形，此时 $\alpha=\beta\approx1/3$，若以 δ 表示狭长矩形的短边长度，则式（3-26）化为

$$\begin{cases}\tau_{max}=\dfrac{T}{W_k}\\[2ex]\varphi=\dfrac{Tl}{GI_k}\end{cases} \qquad (3\text{-}28)$$

式中，$W_k=h\delta^2/3$，$I_k=h\delta^3/3$，此时长边上应力趋于均匀，如图 3-18 所示。

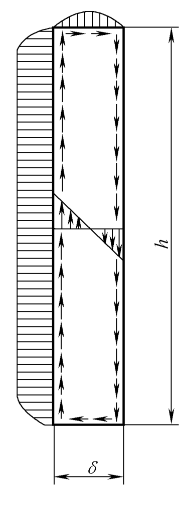


图 3-18　狭长矩形截面杆扭转时横截面切应力分布

在工程实际结构中受扭构件某些横截面的翘曲要受到约束（如支承处、加载面处等）。此扭转为约束扭转，其特点是轴向纤维的长度发

生改变，导致横截面上除扭转切应力外还出现正应力。对非圆截面杆件约束扭转提示：

1）对薄壁截面（如型钢）将引起较大的正应力。有关内容可参“开口薄壁杆件约束扭转”专题；

2）对实心截面杆件（如矩形、椭圆形）正应力一般很小可以略去，仍按自由扭转处理。

例 3-5 某柴油机曲轴的曲柄截面Ⅰ—Ⅰ可以认为是矩形的，如图 3-19 所示。在实用计算中，其扭转切应力近似地按矩形截面杆受扭计算。若 $b=22\text{mm}$，$h=102\text{mm}$，已知曲柄所受扭矩为 $T=281\text{N}\cdot\text{m}$，试求这一矩形截面上的最大切应力。

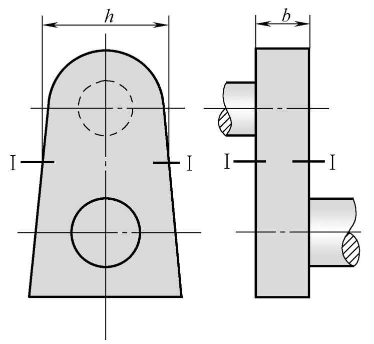


图 3-19

解：由截面Ⅰ—Ⅰ的尺寸求得

$$\frac{h}{b}=\frac{102}{22}=4.64$$

查表，并利用插入法，求出

$$\alpha=0.287$$

于是得

$$\tau_{\max}=\frac{T}{\alpha hb^2}=\frac{281}{0.287\times102\times10^{-3}(22\times10^{-3})^2}\text{Pa}=19.8\text{MPa}$$

3.8 薄壁杆件的自由扭转

薄壁杆件：杆件的壁厚远小于横截面的其他两个尺寸（高和宽）。若杆件截面壁厚中线是一条不封闭的折线或曲线，如图 3-20a 所示，则称为开口薄壁杆件。若为封闭的，则称为闭口薄壁杆件如图 3-20b 所示。

1. 开口薄壁杆件的自由扭转

可把截面视为一个狭长矩形（见图 3-21a）或几个狭长矩形的组合（见图 3-21b）。应力和变形计算可引用狭长矩形截面杆的结果。最后计算公式仍用式（3-28），只是 W_k、I_k 意义做适当改变。

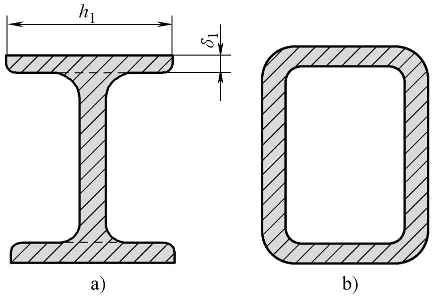


图 3-20 薄壁杆件

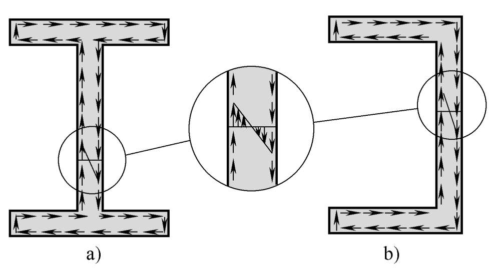


图 3-21 开口薄壁杆件

1）截面可展成一个狭长矩形的，其中 h 为截面展开为狭长矩形时的中线长度，如图 3-20b所示，$h=\pi D$。

2）截面可视为 n 个狭长矩形组成的。可按横截面投影形状保持不变（刚周界）假设，即根据各矩形的扭转角（φ_1、φ_2、…、φ_i、…、φ_n）和整个横截面扭角 φ 相同，而整个截面的扭矩 T 等于各矩形截面承受的分扭矩之和$\left(T=\sum_{i=1}^{n}T_i\right)$，得到

$$\begin{cases} W_k=\dfrac{I_k}{\delta_{max}} \\ I_k=\dfrac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}h_i\delta_i^3 \end{cases} \tag{3-29}$$

说明：①τ_{max}发生在壁最厚的矩形长边上。②对于各种型钢，考虑圆角和壁厚不均匀影响，对 I_k 要乘以修正因数 η，对角钢 $\eta=1.00$，槽钢 $\eta=1.12$，工字钢 $\eta=1.20$。

2. 闭口薄壁杆件

受扭闭口薄壁杆件如图 3-22 所示。对横截面上切应力的假设：

1）沿周边的切线方向作用；

2）沿壁厚均匀分布。

当壁厚变化时，则剪流有

$$\tau_1\delta_1=\tau_2\delta_2=\tau\delta=t\ （常量）$$

根据截面内切应力组成扭矩的条件：

$$T=\oint\tau\delta ds\cdot\rho=t\oint\rho ds=2t\omega$$

此处 $\omega=\dfrac{1}{2}\oint\rho ds$（积分代表截面中线所围面积）

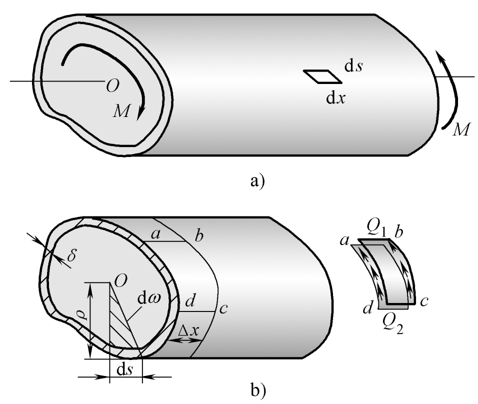


图 3-22　闭口薄壁杆件

于是有

$$\begin{cases} \tau=\dfrac{T}{2\omega\delta} \\ \tau_{max}=\dfrac{T}{2\omega\delta_{min}} \end{cases} \tag{3-30}$$

利用功能原理，对杆长为 l 的整杆可写出扭转力偶 M 所做的功 $W=\dfrac{1}{2}M\varphi$，变形能 $U=\dfrac{M^2l}{8G\omega^2}\oint\dfrac{ds}{\delta(s)}$。

由 $U=W$ 可求得

$$\varphi=\frac{Ml}{4G\omega^2}\oint\frac{ds}{\delta(s)} \tag{3-31a}$$

若壁厚 δ 不变，$\delta(s)=\delta$，则 $\oint\dfrac{ds}{\delta(s)}=\dfrac{s}{\delta}$，有

$$\varphi=\frac{Mls}{4G\omega^2\delta} \tag{3-31b}$$

其中 s 为截面中线的周长。

例 3-6　图 3-23 所示为开口与闭口圆环薄壁杆件，试比较二者的自由扭转切应力和扭角。设两杆材料相同，并具有相同的长度 l、平均半径 r 和壁厚 δ。

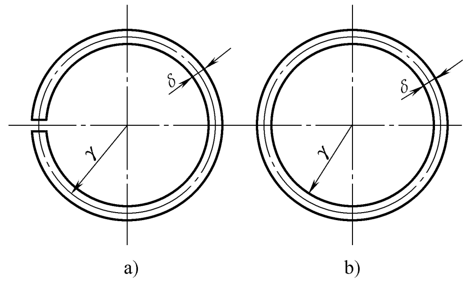


图 3-23　开口与闭口圆环薄壁杆件

解：（1）开口

$$\tau_1=\frac{T}{\frac{1}{3}h\delta^2}=\frac{T}{\frac{1}{3}2\pi r\delta^2}\,(h=2\pi r)$$

$$\varphi_1=\frac{Tl}{G\,\frac{1}{3}h\delta^3}=\frac{3Tl}{G2\pi r\delta^3}$$

（2）闭口

$$\tau_2=\frac{T}{2\omega\delta}=\frac{T}{2\pi r^2\delta}\qquad(\omega=\pi r^2)$$

$$\varphi_2=\frac{Tls}{4G\omega^2\delta}=\frac{Tl\cdot 2\pi r}{4G\pi^2r^4\delta}=\frac{Tl}{2G\pi r^3\delta},\qquad(s=2\pi r)$$

（3）比较

$$\frac{\tau_1}{\tau_2}=3\left(\frac{r}{\delta}\right),\frac{\varphi_1}{\varphi_2}=3\left(\frac{r}{\delta}\right)^2$$

可见开口薄壁杆件的应力和变形都远大于同样情况下的闭口薄壁杆件。

本 章 小 结

本章主要研究圆轴受扭转时，其内力、应力、变形的分析方法及强度和刚度的计算；并介绍了非圆截面杆的扭转问题。

1. 通过对受扭薄壁圆筒的分析引入：

· 纯剪切单元体和切应力及切应力互等定理；

· 切应变和剪切胡克定律 $\tau=G\gamma$。

它们是研究圆轴扭转时应力和变形的理论基础，也是材料力学中重要的基本概念和基本规律。

2. 在平面假设下，利用上述基本概念和规律得到圆轴扭转：

切应力公式　$$\tau_\rho=\frac{T}{I_\rho}\rho$$

变形公式　$$\varphi=\frac{Tl}{GI_\rho}$$

强度条件

$$\tau_{max}=\frac{T}{W_t}\leqslant[\tau]$$

刚度条件

$$\varphi=\frac{T}{GI_\rho}\times\frac{180°}{\pi}\leqslant[\varphi]$$

其中剪切胡克定律、危险切应力 $\tau_0\left([\tau]=\frac{\tau_0}{n}\right)$ 均依赖扭转试验研究。

3. 对非圆截面杆的扭转应掌握以下要点：

翘曲现象；

自由扭转与约束扭转的基本特点；

矩形截面杆扭转切应力的分布特点。

思 考 题

3-1 试画出图 3-24 所示 Ⅰ—Ⅰ横截面上 1、2、3、4 点纯剪切单元体上的应力。

3-2 矩形截面杆受扭转力偶作用，如图 3-25 所示，试证明角点上（如 1 点）切应力必为零。

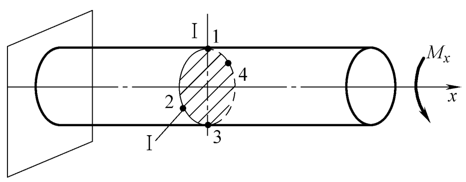


图 3-24 思考题 3-1 图

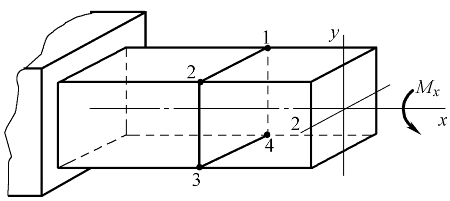


图 3-25 思考题 3-2 图

3-3 在图 3-26a 所示受扭圆轴上，用横截面 ABE、CDF 和水平纵截面 $ABCD$ 从轴中截出一部分如图 3-26b所示，试问：

（1）纵面上的切应力如何分布？（在面上画出）

（2）此切应力构成的合力偶与什么力系相平衡？

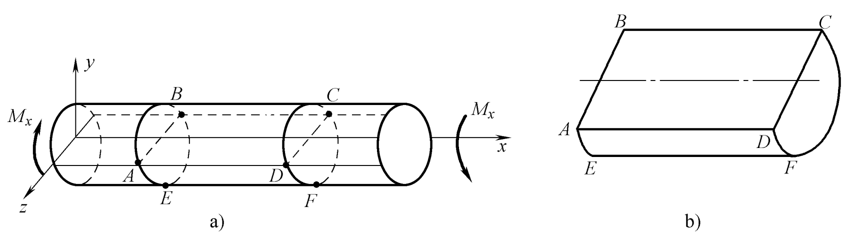


图 3-26 思考题 3-3 图

3-4 同一圆杆在图 3-27a、b、c 所示三种不同加载（加扭转力偶）情况下工作，试问在线弹性与小变形条件下：

（1）图 3-27c 所示加载情况下的应力与变形是否等于图 3-27a、b 两种情况的叠加？

（2）图 3-27c 所示加载情况下的杆内变形能是否等于图 3-27a、b 两种加载情况的叠加，即是否 $U_c=U_a+U_b$？

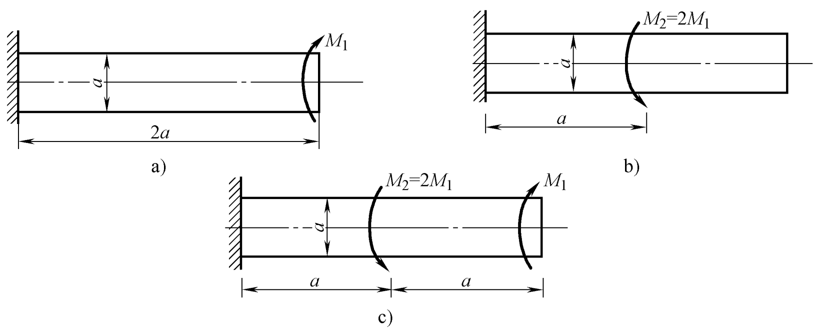


图 3-27　思考题 3-4 图

3-5　关于非圆截面杆扭转，请回答下列问题：

（1）非圆截面杆受扭后与圆杆不同，横截面会产生“翘曲”，为什么“自由扭转”不会造成扭转正应力，而“约束扭转”会造成扭转正应力？

（2）对受扭的非圆实心截面杆，为什么工程计算中即使是约束扭转一般也不考虑扭转正应力？

（3）非圆截面薄壁杆件（以薄壁圆管为例）在自由扭转情况下，在其他条件均相同时，为什么闭口的情况比开口的情况其强度与刚度要大得多？其横截面上切应力分布有什么重大差异？（画出其分布图）

习　题

3-1　试作图 3-28 所示等直杆的扭矩图，并写出 $|T|_{max}$。

3-2　如图 3-29 所示，钢制圆轴上作用有四个外力偶，其矩为 $M_1=1\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_2=0.6\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_3=0.2\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_4=0.2\text{kN}\cdot\text{m}$。

（1）作轴的扭矩图；

（2）若 M_1 和 M_2 的作用位置互换，扭矩图有何变化？

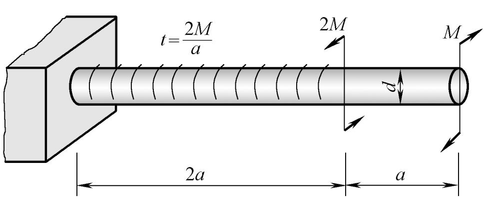


图 3-28　题 3-1 图

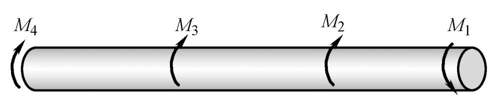


图 3-29　题 3-2 图

3-3　某小型水电站的水轮机容量为 50kW，转速为 300r/min，钢轴直径为 75mm，如果在正常运转下且只考虑扭矩作用，其许用切应力 $[\tau]=20\text{MPa}$。试校核轴的强度。

3-4　图 3-30 所示为阶梯形圆杆，AE 段为空心，外径 $D=140\text{mm}$，内径 $d=100\text{mm}$，BC 段为实心，直径 $d=100\text{mm}$。外力偶矩 $M_A=18\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_B=32\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_C=14\text{kN}\cdot\text{m}$。已知 $[\tau]=80\text{MPa}$，$[\varphi]=1.2°/\text{m}$，$G=80\text{GPa}$。试校核该轴的强度和刚度。

3-5　图 3-31 所示 AB 轴的转速 $n=120\text{r/min}$，从 B 轮上输入功率 $P_k=40\text{kW}$，此功率的一半通过锥齿轮传给垂直轴 V，另一半功率由水平轴 H 传走。已知锥齿轮的节圆直径 $D_1=600\text{mm}$，$D_2=240\text{mm}$；各轴直径为 $d_1=100\text{mm}$，$d_2=80\text{mm}$，$d_3=60\text{mm}$，$[\tau]=20\text{MPa}$，试对各轴进行强度校核。

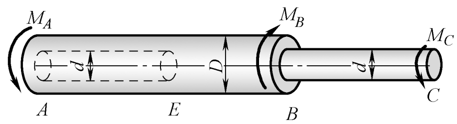


图 3-30　题 3-4 图

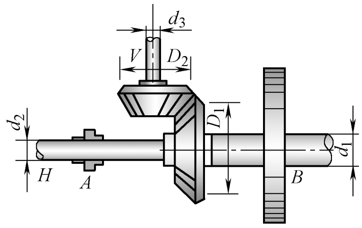


图 3-31　题 3-5 图

3-6　如图 3-32 所示，手摇绞车驱动轴 AB 的直径 $d=3\text{cm}$，由两人摇动，每人加在手柄上的力 $F=250\text{N}$，若轴的许用切应力 $[\tau]=40\text{MPa}$，试校核 AB 轴的扭转强度。

3-7　四辊轧机的传动机构如图 3-33 所示，已知万向接轴的直径 $d=11\text{cm}$，材料为 40Cr，其剪切屈服极限 $\tau_s=450\text{MPa}$，转速 $n=16.4\text{r/min}$；轧机电动机的功率 $P_k=60\text{kW}$。试求此轴的安全因数。

3-8　图 3-34 所示实心圆轴承受外力偶矩 $M=3\text{kN}\cdot\text{m}$，$l=200\text{mm}$，求：

（1）求轴内最大切应力；

（2）求半径 $r=15\text{mm}$ 以内部分圆轴所承受的扭矩在整个截面上所承受扭矩中所占的百分比。

3-9　AB 和 CD 轴在 B 处用法兰连接，在 A、D 两处为固定约束。受力及尺寸如图 3-35 所示，材料的 $G=80\text{GPa}$。$[\tau]=80\text{MPa}$。试校核此轴系的强度。

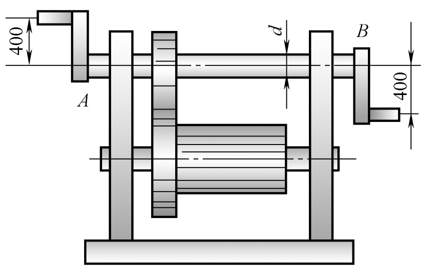


图 3-32　题 3-6 图

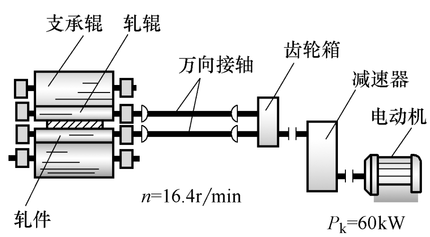


图 3-33　题 3-7 图

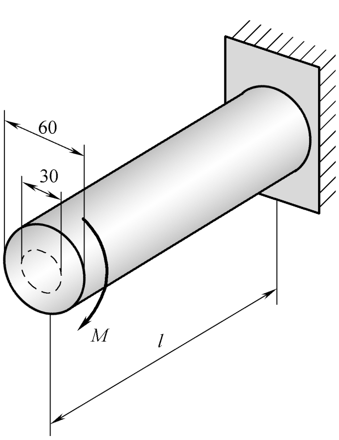


图 3-34　题 3-8 图

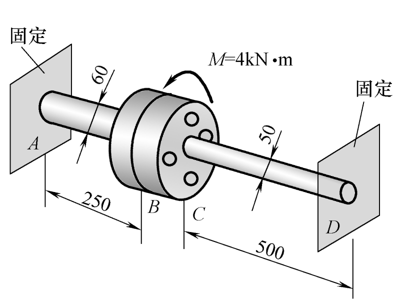


图 3-35　题 3-9 图

第 4 章 弯曲内力

内容梗概： 当杆件受到与其轴线垂直的外力或力偶作用时，杆的轴线由原来的直线变成光滑曲线。这种变形叫作弯曲变形，产生弯曲变形的杆称为梁。梁在横截面上的内力为剪力 F_S 和弯矩 M。弯曲内力的符号规定为，剪力左上右下为正，弯矩左顺右逆为正。剪力图和弯矩图是表示剪力和弯矩沿梁轴线变化规律的图形。既可以根据剪力方程和弯矩方程作图也可以根据 q、F_S、M 间的微分关系作图。平面刚架各杆的内力，除了剪力和弯矩外，还有轴力。作刚架内力图的方法和步骤与直梁相同，但因刚架是由不同取向的杆件组成，习惯上约定：弯矩图画在各杆的受拉一侧，不注明正、负号。剪力图及轴力图，可画在刚架轴线的任一侧须注明正负号。

4.1 弯曲及其工程实例

图 4-1a、b 所示为常见的工厂中调运重物的行车和城市轻轨桥等受弯构件。它们共同的特点是承受垂直于其轴线的外力或外力偶（矢量方向）。受力后轴线由直线变成了光滑曲线，这种变形称为弯曲变形。以弯曲变形为主的杆件称为梁。



a)　　　　b)

图 4-1　受弯曲构件实例

对称弯曲：梁的每一个横截面至少有一根对称轴，这些对称轴构成对称面。所有外力都作用在其对称面内时，梁弯曲变形后的轴线将是位于这个对称面内的一条曲线，这种弯曲形式称为对称弯曲，如图 4-2 所示。当杆件受到一组垂直于其轴线的力即横向力或位于轴线平面内的外力偶作用时，杆的轴线由一条直线变为曲线，称为弯曲变形。如果杆件的几何形状、材料性能和外力都对称于杆件的纵向对称面，则称为对称弯曲。

平面弯曲：如果梁具有纵向对称面，则作用在梁上的外力（包括载荷和支座约束力）的作用线都位于纵向对称平面内，组成一个平衡力系。此时，梁的轴线将弯曲成一条位于纵向对称平面内的平面曲线，这样的弯曲变形称为平面弯曲，如图 4-3 所示。注意：对称弯曲必定是平面弯曲，但平面弯曲不一定是对称弯曲。对于非对称截面梁来说，只要外力和外力偶施加在与横截面的任一个主轴相平行的平面内，发生的仍为平面弯曲。对称弯曲是平面弯曲问题中最常见的情况。

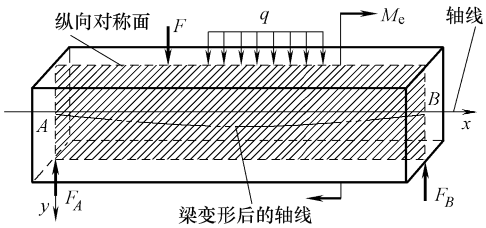


图 4-2　具有纵向对称面的梁

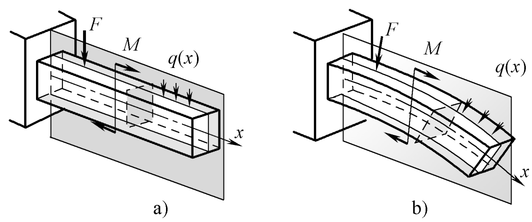


图 4-3　平面弯曲

4.2 梁的基本形式

梁的基本形式有：

简支梁：一端为固定铰支座，而另一端为可动铰支座的梁，如图 4-4a 所示。

悬臂梁：一端为固定端，另一端为自由端的梁，如图 4-4b 所示。

外伸梁：简支梁的一端或两端伸出支座之外的梁，如图 4-4c 所示。

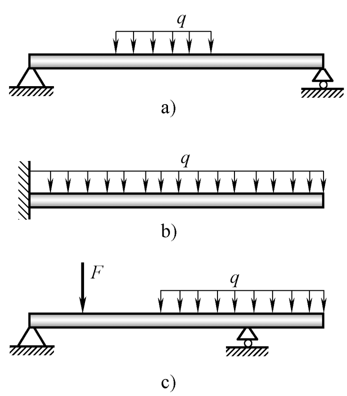


图 4-4　静定梁的基本形式

4.3 梁的内力——剪力和弯矩

如图 4-5a 所示的简支梁，其两端的支座约束力 F_A、F_B 可由梁的静力平衡方程求得。用假想截面将梁分为两部分，并以左段为研究对象（图 4-5b）。由于梁的整体处于平衡状态，因此其各个部分也应处于平衡状态。据此，截面 Ⅰ—Ⅰ 上将产生内力，这些内力将与外力

F_1、F_A 在梁的左段构成平衡力系。

由平衡方程 $\sum F_y=0$，则

$$F_A-F_1-F_S=0$$
$$F_S=F_A-F_1$$

这一与横截面相切的内力 F_S 称为横截面 Ⅰ—Ⅰ上的剪力，它是与横截面相切的分布内力系的合力。

根据平衡条件，若把左段上的所有外力和内力对截面 Ⅰ—Ⅰ的形心 O 取矩，其力矩总和应为零，即 $\sum M_O=0$，则

$$M+F_1(x-a)-F_Ax=0$$
$$M=F_Ax-F_1(x-a)$$

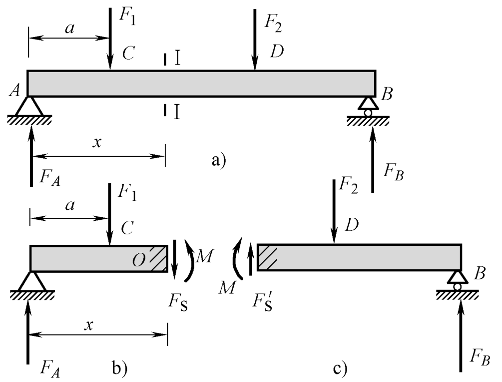


图 4-5　用截面法求梁的内力

这一内力偶矩 M 称为横截面 Ⅰ—Ⅰ上的弯矩。它是与横截面垂直的分布内力系的合力偶矩。剪力和弯矩均为梁横截面上的内力，它们可以通过梁的局部平衡来确定。

剪力的正负号规定：使梁产生顺时针转动的剪力规定为正，反之为负，如图 4-6 所示。

弯矩的正负号规定：使梁的下部产生拉伸而上部产生压缩的弯矩规定为正，反之为负，如图 4-7 所示。

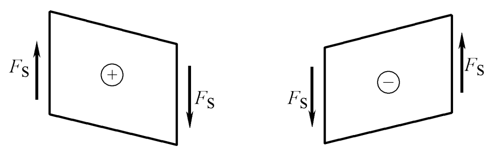


图 4-6　剪力符号规定

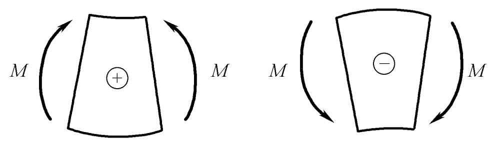


图 4-7　弯矩符号规定

横截面上的剪力在数值上等于此截面左侧（或右侧）梁上所有外力在平行于横截面方向投影的代数和。由于截面左侧向上外力，或右侧向下外力，产生正的剪力，反之产生负的剪力。故剪力的正负号规定也可以简记为“左上右下，F_S 为正”。横截面上的弯矩在数值上等于此截面左侧（或右侧）梁上所有外力对该截面形心的力矩的代数和。由于向上的外力产生正的弯矩，向下的外力产生负的弯矩。截面左侧顺时针转向外力偶，或右侧逆时针转向外力偶，产生正的弯矩；反之产生负的弯矩。故弯矩的正负号规定也可以简记为“左顺右逆，M 为正”。

4.4 剪力图和弯矩图

一般情况下，梁横截面上的剪力和弯矩随截面位置不同而变化。将剪力和弯矩沿梁轴线的变化情况用图形表示出来，这种图形分别称为剪力图和弯矩图。若以横坐标 x 表示横截面在梁轴线上的位置，则各横截面上的剪力和弯矩可以表示为 x 的函数，即 $F_S=F_S(x)$，$M=M(x)$。这些函数分别称为梁的剪力方程和弯矩方程。根据剪力方程和弯矩方程即可画出剪力图和弯矩图。

画剪力图和弯矩图时，首先要建立 F_S-x 和 M-x 坐标系。一般取梁的左端作为 x 坐标的

原点，F_S 坐标和 M 坐标向上为正。然后根据载荷情况分段列出 $F_S(x)$ 和 $M(x)$ 方程。由于剪力方程和弯矩方程沿轴线分段连续，剪力方程和弯矩方程应当分段表示。分段点截面也称控制截面。

剪力方程分段点的确定原则是：

1）集中力（包括约束力）作用点是分段点；

2）分布载荷（主要是均布载荷）作用的起点和终点是分段点。

弯矩方程分段点的确定原则是：

1）集中力（包括约束力）作用点是分段点；

2）分布载荷（主要是均布载荷）作用的起点和终点是分段点；

3）集中力偶（包括约束力偶）作用点是分段点。

考虑到剪力方程和弯矩方程在分段点是否连续，其定义域规定为：对于 $F_S(x)$，在集中力作用点处为开域，其他点为闭域；对于 $M(x)$，在集中力偶作用点处为开域，其他为闭域。

画图时，先求出分段点处横截面上的剪力和弯矩的数值（包括正负号），并将这些数值标在 F_S-x、M-x 坐标中相应位置处。分段点之间的图形可根据剪力方程和弯矩方程绘出。最后注明 $|F_S|_{max}$ 和 $|M|_{max}$ 的数值。

例 4-1 简支梁受力如图 4-8a 所示。试写出梁的剪力方程和弯矩方程，并作剪力图和弯矩图。

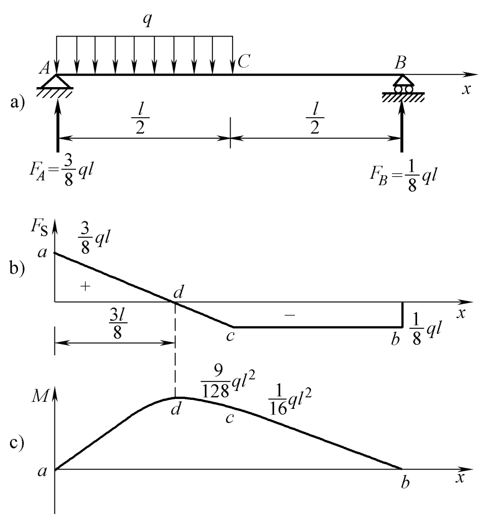


图 4-8

解：（1）求支座约束力

由平衡方程 $\sum M_B=0$ 和 $\sum M_A=0$ 分别求得

$$F_A=\frac{3}{8}ql,\ F_B=\frac{1}{8}ql$$

利用平衡方程 $\sum F_y=0$ 对所求约束力进行校核。

（2）建立剪力方程和弯矩方程

以梁的左端为坐标原点，建立 x 坐标，如图 4-8a 所示。

因在 C 处分布载荷的集度发生变化，故分两段建立剪力方程和弯矩方程。

AC 段：

$$F_{S1}(x)=\frac{3}{8}ql-qx \qquad \left(0<x\leqslant\frac{l}{2}\right)$$

$$M_1(x)=\frac{3}{8}qlx-\frac{1}{2}qx^2 \qquad \left(0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\right)$$

CB 段：

$$F_{S2}(x)=-\frac{1}{8}ql \qquad \left(\frac{l}{2}\leqslant x<l\right)$$

$$M_2(x)=\frac{1}{8}ql(l-x) \qquad \left(\frac{l}{2}\leqslant x\leqslant l\right)$$

绘制 F_S 图：AC 段内，剪力方程 $F_{S1}(x)$ 是 x 的一次函数，剪力图为斜直线，故求出两个端截面的剪力值，$F_{SA右}=\frac{3}{8}ql$，$F_{SC左}=-\frac{1}{8}ql$，分别以 a、c 标在 F_S-x 坐标中，连接 a、c 的直线即为该段的剪力图。CB 段内，剪力方程为常数，求出其中任一截面的内力值，例如 $F_{SB左}=-\frac{1}{8}ql$，连一水平线即为该段剪力图。梁 AB 的剪力图如图 4-8b 所示。

绘制 M 图：AC 段内，弯矩方程 $M_1(x)$ 是力的二次函数，表明弯矩图为二次曲线，求出两个端截面的弯矩，$M_A=0$，$M_C=\frac{1}{16}ql^2$，分别以 a、c 标在 M-x 坐标中。由剪力图知在 d 点处 $F_S=0$，该处弯矩取得极值。为了求出弯矩极值（抛物线顶点值），需要先确定弯矩图中 d 点位置。注意到在 d 点对应的截面上剪力 $F_S=0$，可以设原点到 d 点的距离为 $\bar{x}$。考虑这一梁段的内、外力平衡关系 $\sum F_y=0$，可以直接求出 $\bar{x}=\frac{3l}{8}$。把原点到 d 点梁段上的所有外力和外力偶对截面形心 O 取矩，其力矩总代数和就是 d 点弯矩值，求得 $M_1(\bar{x})=\frac{9}{128}ql^2$。在 M-x 坐标中，据 a、d 、c 三点绘出该段的弯矩图。CB 段内，弯矩方程 $M_2(x)$ 是 x 的一次函数，分别求出两个端点的弯矩，以 c、b 标在 M-x 坐标中，并连成直线。AB 梁的 M 图如图 4-8c 所示。

4.5 剪力、弯矩和载荷集度之间的微分关系

考察图 4-9a 所示承受任意载荷的梁。从梁上受分布载荷的段内截取 dx 微段，其受力如图 4-9b 所示。作用在微分段上的分布载荷可以认为是均布的，并设向上为正。微分段两侧截面上的内力均设为正方向。若 x 截面上的剪力和弯矩分别为 $F_S(x)$、$M(x)$，则在 x+dx 截面上的剪力为 $F_S(x+\mathrm{d}x)$。按照一元函数的泰勒级数展开并略去二阶以上高阶微量后成为 $F_S(x)+\mathrm{d}F_S(x)$；同理弯矩为 $M(x)+\mathrm{d}M(x)$。因为梁整体是平衡的，dx 微段也应处于平衡。根据平衡条件 $\sum F_y=0$ 和 $\sum M_O=0$，得到

$$F_S(x)+q(x)\mathrm{d}x-(F_S(x)+\mathrm{d}F_S(x))=0$$

$$M(x)+\mathrm{d}M(x)-M(x)-F_S(x)\mathrm{d}x-q(x)\frac{\mathrm{d}x^2}{2}=0$$

略去其中的高阶微量后得到

$$\frac{\mathrm{d}F_S(x)}{\mathrm{d}x}=q(x) \tag{4-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=F_S(x) \tag{4-2}$$

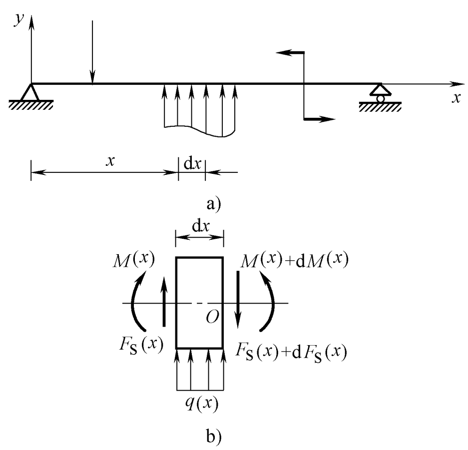


图 4-9 受分布载荷的微段梁的平衡

利用式（4-1）和式（4-2）可进一步得出

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2}=q(x) \tag{4-3}$$

式（4-1）~式（4-3）是剪力、弯矩和分布载荷集度 q 之间的平衡微分关系，它表明：

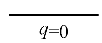
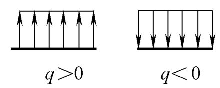
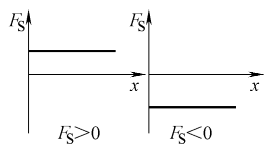
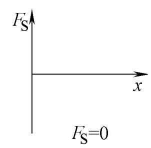
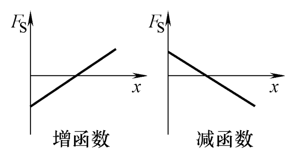
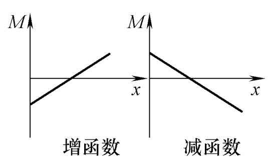
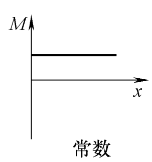
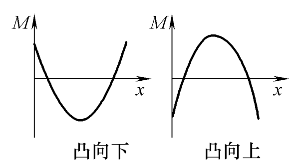
1）剪力图上某处的斜率等于梁在该处的分布载荷集度 q。

2）弯矩图上某处的斜率等于梁在该处的剪力。

3）弯矩图上某处的斜率变化率等于梁在该处的分布载荷集度 q。

表 4-1 列出了弯矩、剪力与载荷集度的微分关系在不同情况下图的特征。

表 4-1　弯矩、剪力与载荷集度的微分关系特征图

	无分布载荷段		均布载荷段
外力			
F_S 图特征	水平直线		斜直线
			
M 图特征	斜直线	水平直线	二次抛物线
			

根据上述微分关系，由梁上载荷的变化即可推知剪力图和弯矩图的形状。例如：

1）若某段梁上无分布载荷，即 $q(x)=0$，则该段梁的剪力 $F_S(x)$ 为常量，剪力图为平行于 x 轴的直线；而弯矩 $M(x)$ 为 x 的一次函数，弯矩图为斜直线。

2）若某段梁上的分布载荷 $q(x)=q$（常量），则该段梁的剪力 $F_S(x)$ 为 x 的一次函数，剪力图为斜直线；而 $M(x)$ 为 x 的二次函数，弯矩图为抛物线。当 $q>0$（q 向上）时，弯矩图为向下凸（极小值）的曲线；当 $q<0$（q 向下）时，弯矩图为向上凸（极大值）的曲线。

3）若某截面的剪力 $F_S(x)=0$，根据$\frac{dM(x)}{dx}=0$，该截面的弯矩为极值。

利用以上各点，除可以校核已做出的剪力图和弯矩图是否正确外，还可以利用微分关系

方便简洁绘制剪力图和弯矩图，而不必再建立剪力方程和弯矩方程，其步骤如下：

1）求支座约束力。

2）确定剪力图和弯矩图的分段数以及曲线形状。

3）将作用在梁的左、右端点的集中力视为“端部剪力”，按照“左上右下”的规则确定端部剪力的符号和大小，直接确定出端部的剪力数值。以两个端部的剪力值作为初值，并计算分段控制点的剪力值，依据分布载荷集度 q 之间的微分关系以及各段剪力图曲线形状逐段绘图。

4）将作用在梁的左、右端点的集中力偶视为“端部弯矩”，按照“左顺右逆”的规则确定端部弯矩的符号和大小，直接确定出端部的弯矩数值。以两个端部的弯矩值作为初值，并计算分段控制点的弯矩值，依据剪力、弯矩和分布载荷集度 q 之间的微分关系以及各段弯矩图曲线形状逐段绘图。

5）在集中力作用处，剪力要发生突变。将已经画过部分遮挡（例如，按照由左向右画时，将梁已经画过的左边部分遮挡；按照由右向左画时，将梁已经画过的右边部分遮挡），该集中力对于梁的剩余部分，可以按照“左上右下，F_S 为正”的规则判定正负号，如果是正号，剪力向上突变；如果是负号，剪力向下突变。

6）在集中力偶作用处，弯矩要发生突变。将已经画过部分遮挡，该集中力偶对于梁的剩余部分，可以按照“左顺右逆，M 为正”的规则判定正负号，如果是正号，弯矩向上突变；如果是负号，弯矩向下突变。

7）当有分布载荷作用时，分布载荷向下时，计算上凸曲线的极大值；分布载荷向上时，计算下凸曲线的极小值。

8）确定 $|F_S|_{max}$ 和 $|M|_{max}$。

例 4-2　梁的受力如图 4-10a 所示，利用微分关系作梁的 F_S、M 图。

解：（1）求支座约束力

由平衡条件 $\sum M_B=0$ 和 $\sum M_A=0$ 分别求出 $F_A=10\text{kN}$，$F_B=5\text{kN}$。

利用平衡条件 $\sum F_y=0$ 进行校核。

（2）确定分段数以及曲线形状

由于载荷在 A、D 处不连续，应将梁分为三段绘制 F_S、M 图如图 4-10b、c 所示。

根据微分关系 $\mathrm{d}F_S/\mathrm{d}x=q(x)$、$\mathrm{d}M/\mathrm{d}x=F_S(x)$ 和 $\mathrm{d}^2M/\mathrm{d}x^2=q(x)$，$CA$ 和 AD 段内，$q=0$，剪力图为水平线，弯矩图为斜直线；DB 段内，$q=$常数，且为负值，剪力为斜直线，M 图为向上凸的抛物线。

（3）求端部剪力值并依据各段剪力图曲线形状逐段绘图

F_S 力端部数值：$F_{SC右}=-3\text{kN}$，$F_{SB左}=-5\text{kN}$。分段控制点的剪力值：$F_{SA右}=7\text{kN}$，$F_{SD右}=7\text{kN}$。据此可做出 $\overline{CA}$ 和 $\overline{AD}$ 两段 F_S 图的水平线。由于分布载荷向下，$q<0$，作出 $\overline{DEB}$ 段 F_S 图为具有负斜率的斜直线。

（4）求端部弯矩值并依据各段弯矩图曲线形状逐段绘图

M 端部数值：$M_C=0$，$M_B=0$。分段控制点的弯矩值：$M_{A左}=-1.8\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_{A左}=M_{A右}=M_A=-1.8\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_{D左}=2.4\text{kN}\cdot\text{m}$。据此可以做出 $\overline{CA}$ 段弯矩图为负斜率的斜直线，$\overline{AD}$ 段弯矩图为正斜率的斜直线，$\overline{DEB}$ 段弯矩图为上凸的抛物线。

（5）在集中力作用处，剪力要发生突变。A 支座的约束力 F_A 对于剩余的 $\overline{ADB}$ 段而言，相当于“正剪力”，会使截面 A 由左侧到右侧剪力发生向上突变，由 $F_{SA左}=-3\text{kN}$ 改变到 $F_{SA右}=7\text{kN}$。注意此处对应的弯矩图呈现出“折角”。

（6）在集中力偶作用处，弯矩要发生突变。D 处的集中力偶 M 对于剩余的 $\overline{DB}$ 段而言，相当于“负弯矩”会使截面 D 由左侧到右侧弯矩向下突变，由 $M_{D左}=2.4\text{kN}\cdot\text{m}$ 改变到 $M_{D右}=-1.2\text{kN}\cdot\text{m}$。注意在 D 点没有集中力作用，D 点两侧弯矩图的斜率相同。

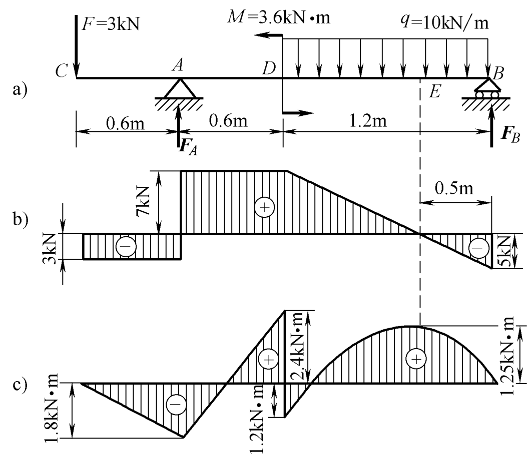


图 4-10

（7）求弯矩极值。由 $\overline{DEB}$ 段的剪力图知在 E 处 $F_S=0$，该处弯矩为极大值。因 $F_B=5\text{kN}$，根据 $\overline{BE}$ 段的平衡条件 $\sum F_y=0$，知 $\overline{BE}$ 段的长度为 0.5m，于是求得 $M_E=1.25\text{kN}\cdot\text{m}$。根据上述三个截面的弯矩值可做出 $\overline{DB}$ 段的 M 图。对做出的 F_S、M 图要利用微分关系和突变规律、端点规律做进一步的校核。如 $\overline{DB}$ 段内的均布载荷为负值，该段 F_S 图的斜率应为负；$\overline{CA}$ 段的 F_S 为负值，该段 M 图的斜率应为负；$\overline{AD}$ 段的 F_S 为正值，该段 M 图的斜率应为正；支座 A 处剪力图应发生突变，突变值应为 10kN；D 处有集中力偶，D 截面左右两侧的弯矩应发生突变，而且突变值应为 $3.6\text{kN}\cdot\text{m}$；支座 B 和自由端 C 处的弯矩应为零等。

（8）确定 $|F_S|_{max}=7\text{kN}$ 和 $|M|_{max}=2.4\text{kN}\cdot\text{m}$。

4.6 平面刚架和曲杆的内力图

杆系结构若在结点处为刚性连接，则这种结构称为刚架。各杆连接处称为刚结点。刚架变形时，刚结点处各杆轴线之间的夹角保持不变。

平面刚架各杆的内力，除了剪力和弯矩外，还有轴力。作刚架内力图的方法和步骤与直梁相同，但因刚架是由不同取向的杆件组成，习惯上约定：弯矩图，画在各杆的受拉一侧，不注明正、负号。剪力图及轴力图，可画在刚架轴线的任一侧（通常正值画在刚架外侧），但须注明正负号；剪力和轴力的正负号仍与前述规定相同。

然而，很多情况下很难判断杆的受拉侧，此时可以采用具有统一逆时针转向的折线坐标系。组成平面刚架的各直杆均在某折线坐标系下，按照直梁绘制内力图的方法绘图。应当注意，由于刚结点可以传递弯矩。绘弯矩图时，在刚结点所联系的两直杆的弯矩，应当满足“等值同侧”的原则进行传递。即弯矩从一根直杆转移到另一直杆时，弯矩大小不变并且保持在框架的同一侧。

曲杆横截面上的内力情况及其内力图的绘制方法，与刚架相类似。

例 4-3　刚架受力如图 4-11a 所示。绘刚架的内力图。

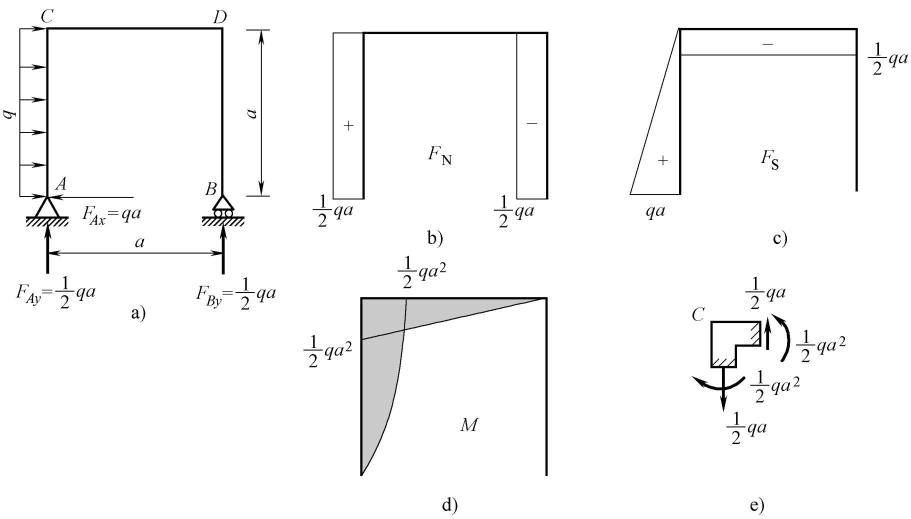


图　4-11

解：（1）求支座约束力

根据平衡条件求出支座约束力如图 4-11a 所示。

（2）分段作内力图

将刚架分为$\overline{AC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DB}$三段，利用截面法求出各段控制截面的内力值，利用微分关系确定曲线形状，分别做出三段的内力图。F_N 图、F_S 图、M 图分别如图 4-11b、c、d 所示。作 F_N 图和 F_S 图可以画在杆轴的任一侧，但要标明正负号。在$\overline{AC}$段内有均布载荷，F_S 图为斜直线，M 图为抛物线；因该段 C 截面处 F_S 为零，故 M 图在该处的斜率应为零。

（3）对做出的内力图，除可以用微分关系、突变规律、端点规律进行校核外，还可以利用刚结点处平衡条件进行校核。如将刚结点 C 截出，根据已做好的内力图做出其受力图如图 4-11e 所示，校核其是否处于平衡。

例 4-4　曲杆受力如图 4-12a 示。绘曲杆的内力图。

解：（1）求支座约束力

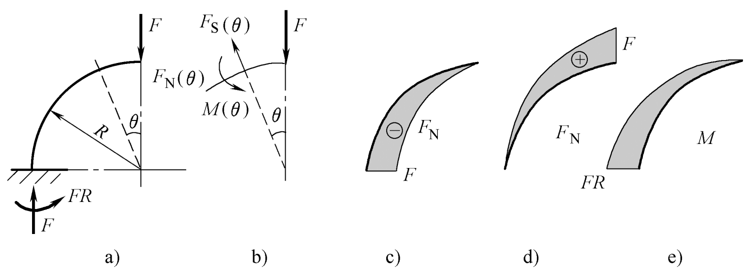


图　4-12

根据平衡条件求出固定支座 A 的约束力如图 4-12a 所示。

（2）建立内力方程

用圆心角为 θ 的横截面取隔离体，其受力图如图 4-12b 所示。由平衡条件求得

$$\begin{cases} M(\theta)=FR\sin\theta \\ F_S(\theta)=F\cos\theta \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2} \\ F_N(\theta)=-F\sin\theta \end{cases}$$

（3）绘曲杆内力图

根据平衡方程绘出的内力图如图 4-12c、d、e 所示。

本章小结

1. 梁在横向载荷作用下，横截面上的内力有剪力和弯矩，分别用 F_S 和 M 表示。求剪力和弯矩的基本方法是截面法，即用一假想的截面将梁截为两段，考虑其中任一段的平衡。作用在该段梁上的力既有外力也有内力（F_S、M），利用平衡条件即可求得截面上的剪力和弯矩。

2. 弯曲内力的正负号根据变形规定：使梁产生顺时针转动的剪力规定为正，反之为负；使梁下部产生拉伸而上部产生压缩的弯矩规定为正，反之为负。简言之，剪力符号：左上右下为正；弯矩符号：左顺右逆为正。

3. 画剪力、弯矩图的方法可以分为两种：根据剪力、弯矩方程作图；利用 q、F_S、M 间的微分关系直接作图。无论用哪种方法，其作图步骤可以分为以下四步。

1）求支座约束力；

2）分段列方程或分段利用微分关系确定曲线形状；

3）求控制截面内力，绘 F_S、M 图；

4）确定 $|F_S|_{max}$ 和 $|M|_{max}$。

4. 均布载荷不连续处，集中力（包括支座约束力）和集中力偶作用处为分段处。通常每段的两个端截面即为控制截面。当内力图为曲线时，内力取得极值的截面也为控制截面。

5. 画内力图，首先要保证支座约束力正确无误。通常用力矩方程求约束力的大小和方向，利用投影方程对计算结果进行校核。

6. 要注意内力正负号与写平衡方程时有关力和力矩正负号的区别。前者是根据变形定正负号，后者是根据力和力矩在坐标中的方向和转向规定正负号。

7. 画 F_S、M 图的关键是利用微分关系（或 $F_S(x)$、$M(x)$ 方程）定形，用截面法求控制截面的内力值（大小和正负）。

8. 注意突变规律和端点规律在内力图中的体现。这些规律实质上是微段平衡条件的体现。

9. 做出 F_S、M 图后，要利用微分关系，突变规律、端点规律进行校核。对刚架内力图要特别注意对刚结点处平衡的校核。

思　考　题

4-1　什么是平面弯曲？具有纵向对称面（横截面镜向对称）的梁受到垂直于轴线的外力作用，一定会发生平面弯曲吗？当梁发生平面弯曲时，此梁必须要有纵向对称面吗？

4-2　当梁的某个横截面弯矩取得最大值时，此截面的剪力一定为零吗？

4-3　当简支梁只受集中力和集中力偶作用时，则最大剪力必发生在什么位置？

4-4　对于一根外伸梁，建立剪力方程和弯矩方程时，在不同段内采用不同坐标系（如右手坐标系与左手坐标系），会有什么问题？

4-5　用截面法将梁分成两部分，计算梁截面上的内力时，下列说法是否正确？如不正确应如何改正？

（1）在截面的任一侧，向上的集中力产生正的剪力，向下的集中力产生负的剪力。

（2）在截面的任一侧，顺时针转向的集中力偶产生正弯矩，逆时针的产生负弯矩。

4-6　梁在集中力作用的截面处，其剪力图和弯矩图有什么特点？

4-7　梁在集中力偶作用的截面处，其剪力图和弯矩图有什么特点？

4-8　梁在某一段内作用有均匀向下的分布载荷时，则该段内的剪力图和弯矩图有什么特点？

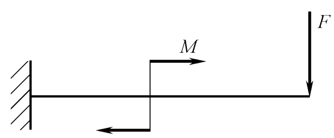


图 4-13　思考题 4-9 图

4-9　如图 4-13 所示悬臂梁上作用集中力 F 和集中力偶 M，若将 M 在梁上移动时，剪力图和弯矩图会有什么变化？

4-10　如图 4-14 所示的多跨梁受两种载荷作用，则两者的剪力图和弯矩图有什么特点？

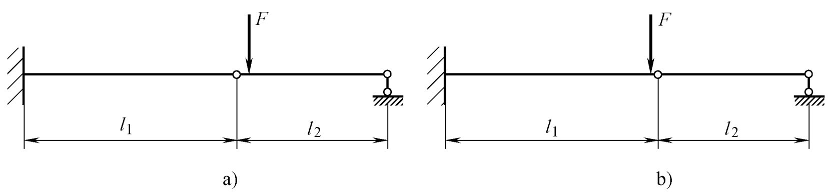


图 4-14　思考题 4-10 图

4-11　对图 4-15 所示简支梁的 m—n 截面，如用截面左侧的外力计算剪力和弯矩，则 F_S 和 M 便与 q 无关；如用截面右侧的外力计算，则 F_S 和 M 又与 F 无关。这样的论断正确吗？为何？

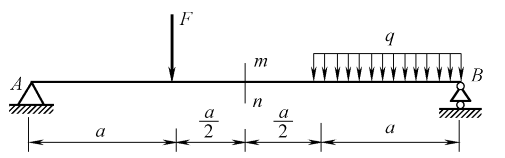


图 4-15　思考题 4-11 图

习　题

4-1　试求图 4-16 所示梁在截面 1—1 、2—2 上的剪力和弯矩，这些截面无限接近于截面 C 及截面 D 。设 q、a 均为已知。

4-2　外伸梁及受载情况如图 4-17 所示。（1）试求出梁的剪力方程和弯矩方程。（2）确定 $|F_S|_{max}$ 及 $|M|_{max}$。

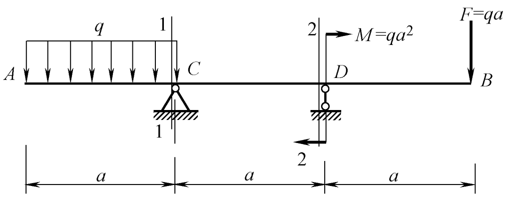


图 4-16　题 4-1 图

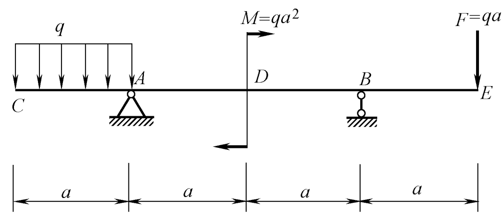


图 4-17　题 4-2 图

4-3　设已知图 4-18 所示各梁的载荷 F、q、m 和尺寸 a，（1）列出梁的剪力方程和弯矩方程；（2）作剪力图和弯矩图；（3）确定 $|F_S|_{max}$ 及 $|M|_{max}$。

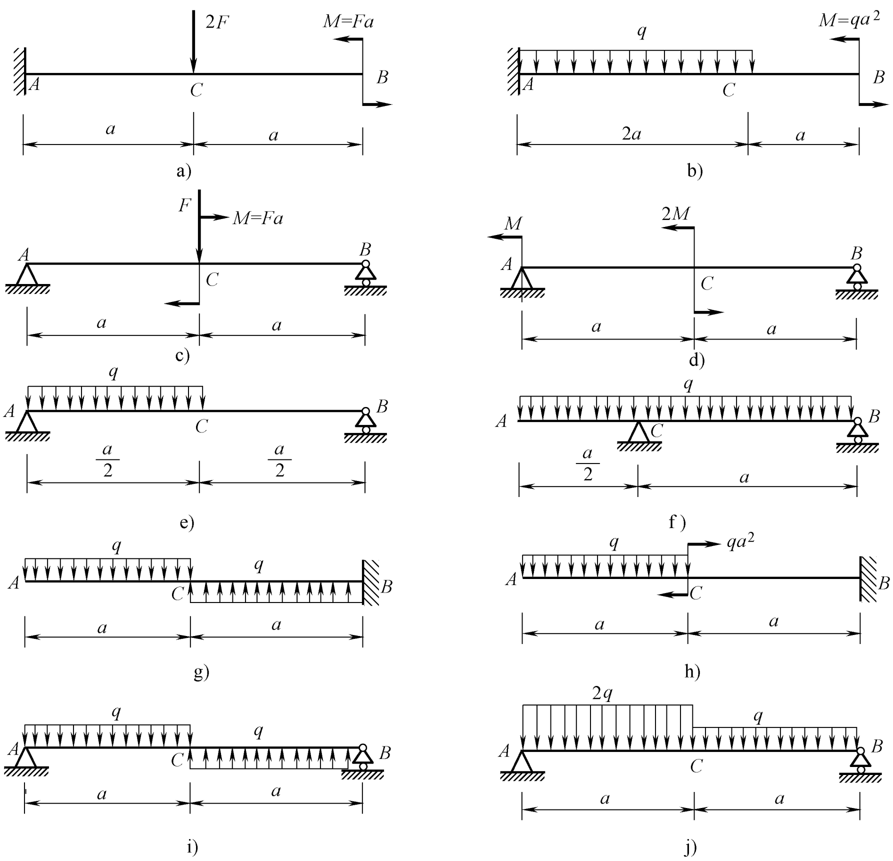


图 4-18　题 4-3 图

4-4　已知简支梁的剪力图如图 4-19 所示。做梁的弯矩图和载荷图。已知梁上没有集中力偶作用。

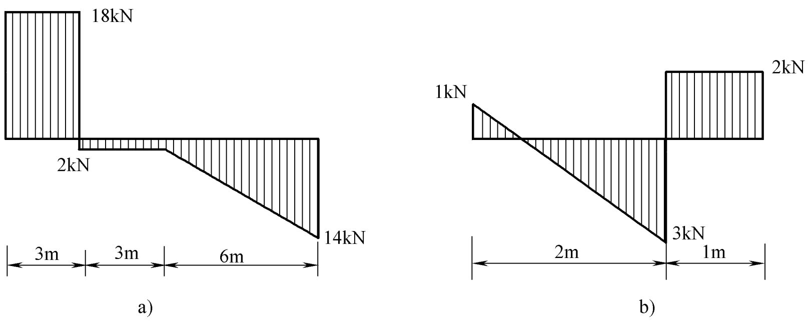


图 4-19　题 4-4 图

4-5　用微分关系做图 4-20 所示各梁的剪力图和弯矩图。

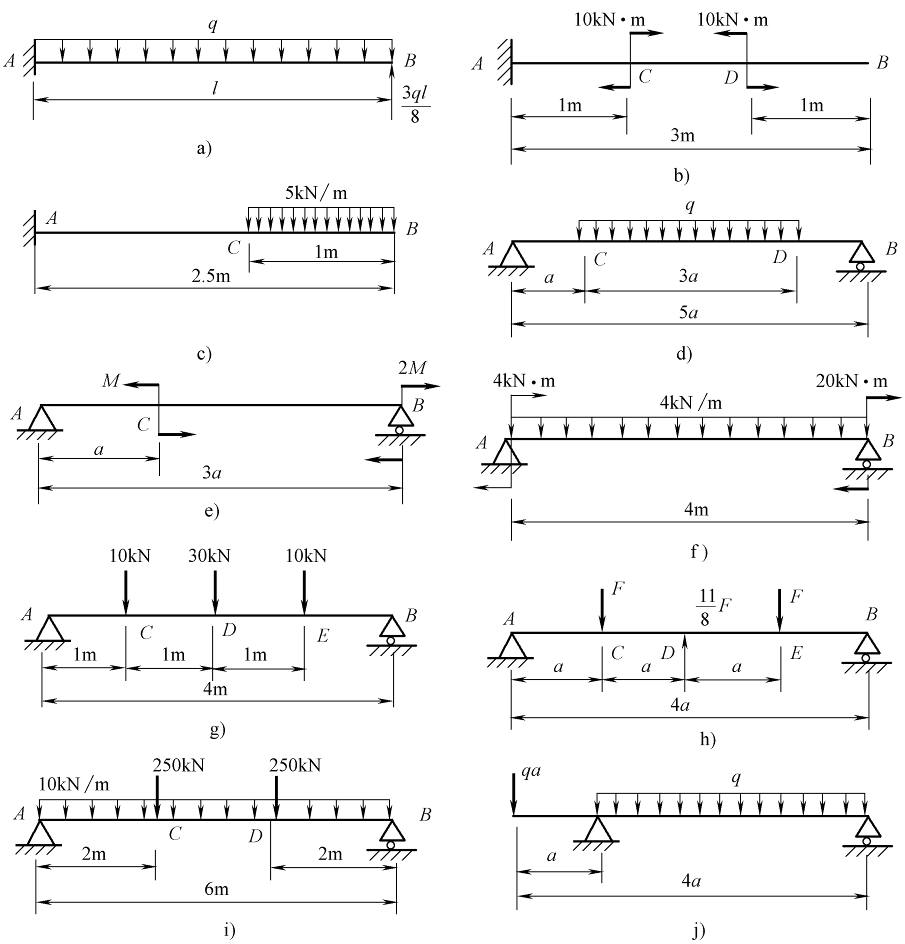
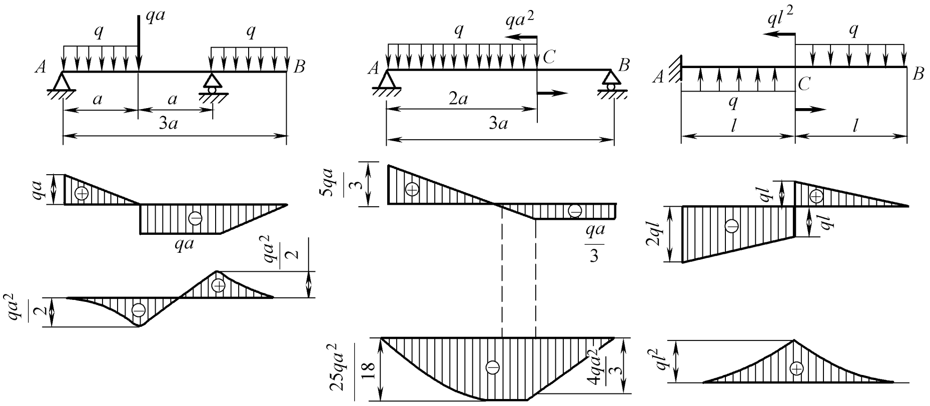


图 4-20　题 4-5 图

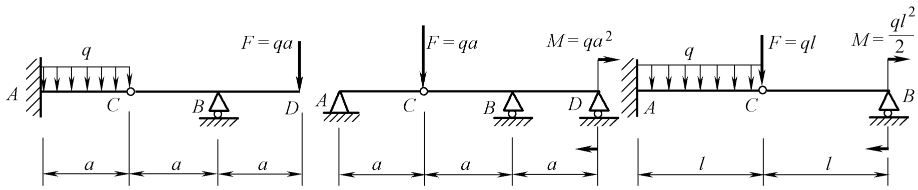
4-6　试根据弯矩、剪力与载荷集度之间的微分关系指出图 4-21 所示剪力图和弯矩图的错误。

4-7　试作图 4-22 所示具有中间铰的梁的剪力图和弯矩图。



a)　　b)　　c)

图 4-21　题 4-6 图



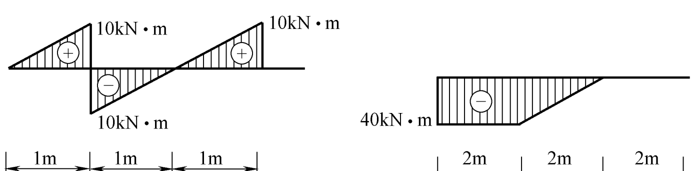
a)　　b)　　c)

图 4-22　题 4-7 图

4-8　试根据图 4-23 所示简支梁的弯矩图做出梁的剪力图与载荷图。

4-9　如图 4-24 所示，土壤与静水压力往往按线性规律分布，若简支梁在按线性规律分布的载荷作用下，试作剪力图和弯矩图。

4-10　作图 4-25 所示刚架的剪力图、弯矩图和轴力图。



a)　　b)

图 4-23　题 4-8 图

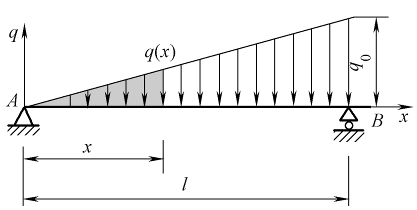


图 4-24　题 4-9 图

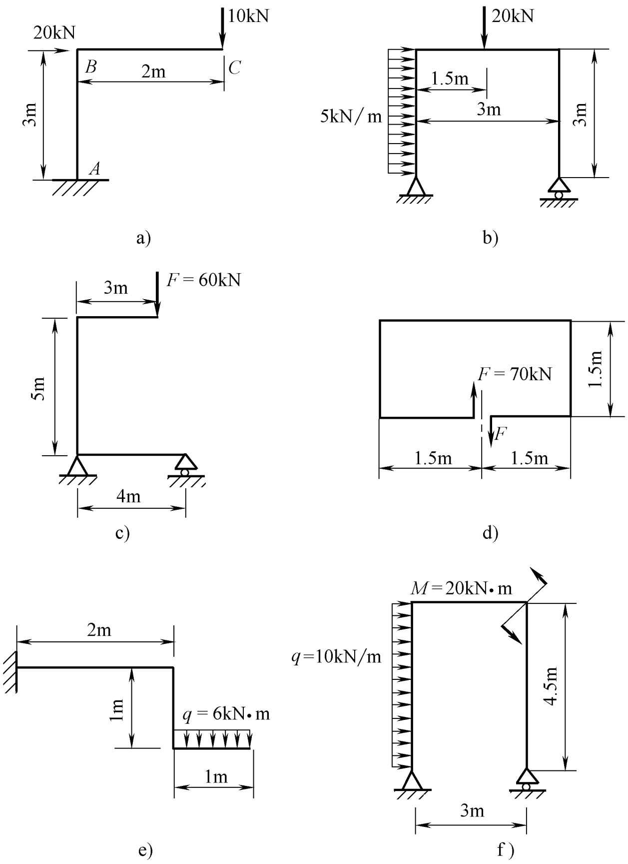

20kN
10kN
B
2m
C
3m
A
a)
20kN
1.5m
5kN/m
3m
3m
b)
3m
F = 60kN
5m
4m
c)
F = 70kN
1.5m
F
1.5m
1.5m
d)
2m
1m
q = 6kN·m
1m
e)
M = 20kN·m
q=10kN/m
4.5m
3m
f)

图 4-25　题 4-10 图

第 5 章

弯曲应力

内容梗概：纯弯曲时，推导梁横截面正应力公式应当从变形实验观察、物理关系和静力学三方面着手。由变形关系给出平面假设，并进一步推论梁内存在既不伸长也不缩短的材料层，称为中性层。中性层与横截面的交线称为中性轴。横截面上的线应变以中性轴为基准线，沿截面高度线性分布。通过胡克定律，对于单一材料组成的梁，其横截面上正应力沿截面的高度呈现线性分布规律，在中性轴处为零。根据横截面上的正应力与内力的静力等效关系，得到梁弯曲变形和正应力的基本计算公式。横力弯曲时，梁横截面上既有正应力又有切应力。对于矩形截面，由切应力沿厚度均匀分布的假设可以导出切应力公式。弯曲正应力是影响梁强度的主要因素，对梁的强度计算主要是满足强度条件。对薄壁截面梁，有时需要校核切应力的强度条件。

5.1 纯弯曲正应力

1. 纯弯曲的概念

梁的横截面上同时存在剪力和弯矩时，这种弯曲称为横力弯曲。剪力 F_S 是横截面切向分布内力的合力；弯矩 M 是横截面法向分布内力的合力偶矩。所以横弯梁横截面上将同时存在切应力 τ 和正应力 σ。实践和理论都证明，其中弯矩是影响梁的强度和变形的主要因素。因此，我们先讨论 $F_S=0$，$M=$常数的弯曲问题，这种弯曲称为纯弯曲。图 5-1 所示梁的 CD 段为纯弯曲；其余部分则为横弯曲。

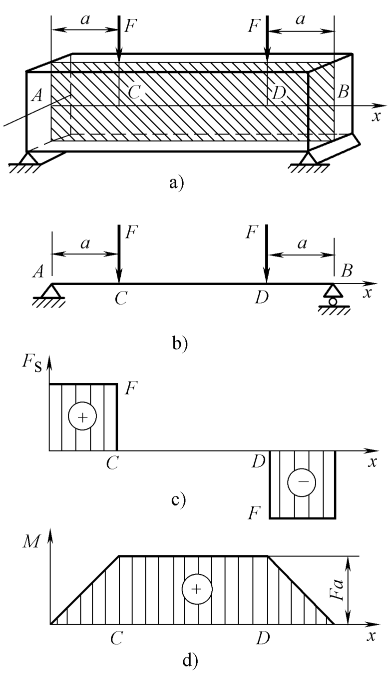


图 5-1　纯弯曲与横弯曲

2. 弯曲问题的研究历程——研究方法论

伽利略是有文献记载的第一位将梁作为变形体研究的科学家。他在 1638 年出版的《两种新科学的对话》一书中（见图 5-2），根据大量的悬臂梁弯曲破坏的试验数据和理论分析，指出对长度相似的柱形梁，抗弯力矩和半径立方成比例，开创了通过实验观察—形成假设—实践检验—形成理论的唯象学的科学研究方法论。他观察到在重力作用下，木质梁弯曲断裂后

所呈现的底部一端仍然没有断开的试验结果，提出猜想：悬臂梁在横力载荷作用下弯曲时，梁的各层纵向纤维均绕底部转动，也即横截面绕底线转动。

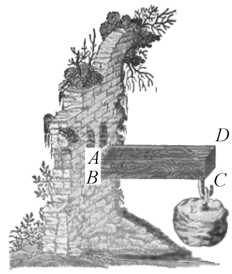


图 5-2　伽利略梁

然而大量的实践结构证明这个猜想是错误的。直到 1705 年由伯努利引入中性层的概念，才得到正确的弯曲正应力分布规律。（请读者思考，为什么伽利略采用实践—认识—再实践—再认识的科学研究方法论却得到错误的结论？）

3. 纯弯曲时梁横截面上的正应力

与扭转相似，分析纯弯梁横截面上的正应力，同样需要综合考虑变形、物理和静力三方面的关系。

（1）变形关系——平面假设　考察等截面直梁。加载前在梁表面上画上与轴线垂直的横线，以及与轴线平行的纵线，如图 5-3a 所示。然后在梁的两端纵向对称面内施加一对力偶，使梁发生弯曲变形，如图 5-3b 所示。可以发现梁表面变形具有如下特征：

1）横线（*m*—*m* 和 *n*—*n*）仍是曲线，只是发生相对转动，但仍与纵线（如 *a*—*a*、*b*—*b*）正交。

2）纵线（*a*—*a* 和 *b*—*b*）弯曲成曲线，且梁的一侧伸长，另一侧缩短。

根据上述梁表面变形的特征，以及由表及里的逻辑思路，可以做出以下假设：梁变形后，其横截面仍保持平面，并垂直于变形后梁的轴线，只是绕着梁上某一轴转过一个角度。这一假设也称纯弯梁的平面假设。

根据上述假设，梁弯曲后，其纵向层一部分产生伸长变形，另一部分则产生缩短变形，二者交界处存在既不伸长也不缩短的一层，这一层称为中性层。如图 5-4 所示。中性层与横截面的交线为截面的中性轴。横截面上位于中性轴两侧的各点分别承受拉应力或压应力；中性轴上各点的应力为零。

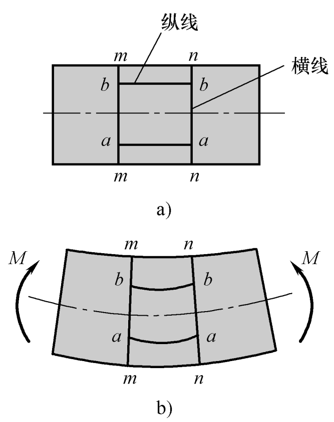


图 5-3　横截面的变形

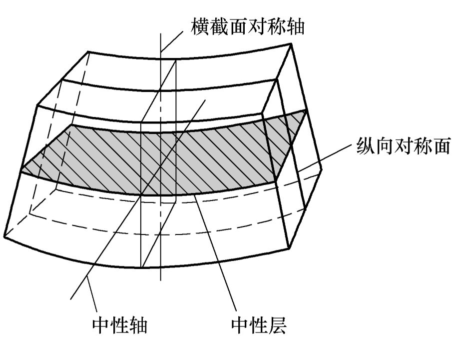


图 5-4　平面假设时梁的变形

考察梁上相距为 dx 的微线段（见图 5-5a），其变形后变成微弧线段（见图 5-5b）。规定坐标轴方位为 x 轴沿梁的轴线，y 轴与横截面的对称轴重合正向垂直向下，z 轴为中性轴。中性层的曲率半径 ρ。考察距中性轴为 y 处的纵向层 *a*—*a*，弯曲前的长度为 $\rho \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}x$，弯曲后的长度为 $(\rho+y)\mathrm{d}\theta$。其纵向正应变为

$$\varepsilon=\frac{(\rho+y)\,\mathrm{d}\theta-\rho\mathrm{d}\theta}{\rho\mathrm{d}\theta}=\frac{y}{\rho} \tag{a}$$

式（a）表明：纯弯曲时梁横截面上各点的纵向线应变沿截面高度线性分布。

（2）物理关系　根据以上分析，梁横截面上各点只受正应力作用。再假设梁的各纵向层互不挤压，即梁的纵截面上无正应力作用。所以纯弯梁各点处于单向应力状态。对于线弹性材料，根据胡克定律

$$\sigma=E\varepsilon$$

于是有

$$\sigma=\frac{E}{\rho}\cdot y \tag{b}$$

式中，E、ρ 均为常数，式（b）表明：纯弯梁横截面上任一点处的正应力与该点到中性轴的垂直距离 y 成正比。即正应力沿着截面高度按线性分布，如图 5-5d 所示。式（b）还不能直接用以计算应力，因为中性层的曲率半径 ρ 以及中性轴的位置尚未确定。这要利用静力关系来解决。

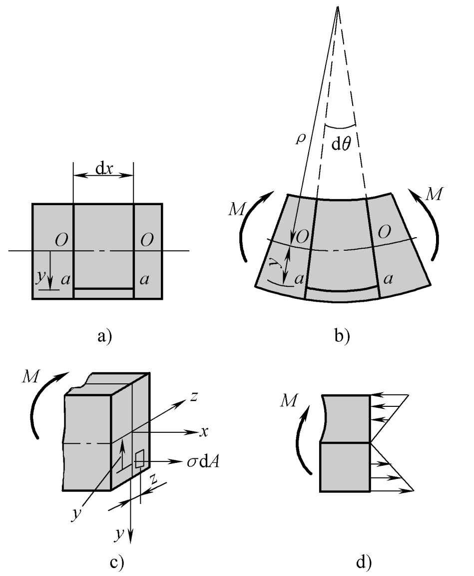


图 5-5　梁在纯弯曲时的正应力

（3）静力学关系　研究横截面上的弯曲正应力 σ 与同截面上的内力之间的静力学等效关系称为弯曲时的静力学关系。考虑弯矩 M 作用在纵向面即 x-y 平面内。截面上坐标为 y、z 的微面积 $\mathrm{d}A$ 上有作用力 $\sigma\mathrm{d}A$。横截面上所有微面积上的力形成了空间平行力系。按照静力学知识，将该力系对横截面的形心进行简化，其结果为轴力 F_N 以及对 y、z 轴的力矩 M_y 和 M_z，即

$$F_N=\int_A \sigma\mathrm{d}A \tag{c}$$

$$M_y=\int_A z\sigma\mathrm{d}A \tag{d}$$

$$M_z=\int_A y\sigma\mathrm{d}A \tag{e}$$

在纯弯情况下，梁横截面上只有弯矩 $M_z=M$，而轴力 F_N 和 M_y 皆为零。

将式（b）代入式（c），因为 $F_N=0$，故有

$$F_N=\int_A \frac{E}{\rho}y\mathrm{d}A=\frac{E}{\rho}\int_A y\mathrm{d}A=\frac{E}{\rho}S_z=0$$

其中

$$S_z=\int_A y\mathrm{d}A$$

称为截面对 z 轴的静矩。因为 $\dfrac{E}{\rho}\neq 0$，故有 $S_z=0$。这表明中性轴 z 通过截面形心。

将式（b）代入式（d），有

$$M_y = \int_A \frac{E}{\rho} yz\mathrm{d}A = \frac{E}{\rho}\int_A yz\mathrm{d}A = \frac{E}{\rho} I_{yz} = 0$$

其中

$$I_{yz} = \int_A yz\mathrm{d}A$$

称为截面对 y、z 轴的惯性积。使 $I_{yz}=0$ 的一对互相垂直的轴称为主轴。由于 y 轴为横截面的对称轴，对称轴必为主轴，而 z 轴又通过横截面形心，所以 y、z 轴为形心主轴。

将式（b）代入式（e），有

$$M_z = \int_A \frac{E}{\rho} y^2\mathrm{d}A = \frac{E}{\rho}\int_A y^2\mathrm{d}A = \frac{E}{\rho} I_z = M$$

得到

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z} \tag{5-1}$$

其中

$$I_z = \int_A y^2\mathrm{d}A$$

称为截面对 z 轴的惯性矩；EI_z 称为截面的抗弯刚度。式（5-1）表明，梁弯曲的曲率与弯矩成正比，而与抗弯刚度成反比。

将式（5-1）代入式（b），得到纯弯曲情况下的正应力计算公式

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_z} \tag{5-2}$$

式（5-2）中正应力 σ 的正负号与弯矩 M 及点的坐标 y 的正负号有关。实际计算中，可根据截面上弯矩 M 的方向，直接判断中性轴的哪一侧产生拉应力，哪一侧产生压应力，而不必计及 M 和 y 的正负。上述公式是根据等截面直梁在线弹性范围内发生纯弯曲以及梁由单一材料组成导出的。对于缓慢变化的变截面梁以及曲率很小的曲梁（$h/\rho_0 \leqslant 0.2$，ρ_0 为曲梁轴线的曲率半径）可近似适用。对于曲率 $\kappa = 1/\rho_0$ 较大的曲梁或者由多种材料组成的复合梁都必须另行推导出相应的应力公式。

5.2 横力弯曲正应力

梁在横弯曲作用下，其横截面上不仅有正应力，还有切应力。由于存在切应力，横截面不再保持平面，而发生“翘曲”现象。进一步分析表明，对于细长梁（例如矩形截面梁，$l/h \geqslant 5$，l 为梁长，h 为截面高度），切应力对正应力和弯曲变形的影响很小，可以忽略不计，式（5-1）和式（5-2）仍然适用。当然式（5-1）和式（5-2）只适用于材料在线弹性范围，并且要求外力满足平面弯曲的加力条件：对于横截面具有对称轴的梁，只要外力作用在对称平面内，梁便产生平面弯曲；对于横截面无对称轴的梁，只要外力作用在形心主轴平面内，实心截面梁便产生平面弯曲。

5.3 弯曲正应力强度条件

根据前面的分析，对细长梁进行强度计算时，主要考虑弯矩的影响，因截面上的最大正

应力作用点处，弯曲切应力为零，故该点为单向应力状态。为保证梁的安全，梁的最大正应力点应满足强度条件

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}y_{\max}}{I_z}\leqslant[\sigma] \tag{5-3}$$

式中，[σ] 为材料的许用应力。对于等截面直梁，若材料的拉、压强度相等，则最大弯矩的所在面称为危险面，危险面上距中性轴最远的点称为危险点。此时强度条件式（5-3）可表达为

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}\leqslant[\sigma] \tag{5-4}$$

式中，

$$W_z=\frac{I_z}{y_{\max}} \tag{5-5}$$

称为抗弯截面系数（或抗弯截面模量），其量纲为［长度］^{3}。国际单位用 m^3或 mm^3。

对于宽度为 b、高度为 h 的矩形截面，抗弯截面模量为

$$W_z=\frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}}=\frac{bh^2}{6} \tag{5-6}$$

直径为 d 的圆截面，抗弯截面模量为

$$W_z=\frac{\frac{\pi}{64}d^4}{\frac{d}{2}}=\frac{\pi d^3}{32} \tag{5-7}$$

内径为 d、外径为 D 的空心圆截面，抗弯截面模量为

$$W_z=\frac{\frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4)}{\frac{D}{2}}=\frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4),\alpha=\frac{d}{D} \tag{5-8}$$

轧制型钢（工字钢、槽钢等）的 W_z 可从型钢表中查得。

对于由脆性材料制成的梁，由于其抗拉强度和抗压强度相差甚大，所以要对最大拉应力点和最大压应力点分别进行校核。

根据式（5-4），可以解决三类弯曲强度问题，即①强度校核；②截面设计；③许用载荷计算。

例 5-1 一铸铁梁的受力如图 5-6a 所示，其截面尺寸如图 5-6b 所示。形心主惯性矩 $I_z=7.64\times10^6mm^4$。铸铁材料的拉、压许用应力分别为 $[\sigma_t]=40MPa$ 及 $[\sigma_c]=80MPa$。试校核此梁是否安全。

解：（1）绘梁的弯矩图，如图 5-6c 所示。

（2）强度校核

因剪力在梁中引起的切应力较小，故只对正应力进行校核。由于梁的截面上、下不对称

于中性轴，而材料的拉、压许用应力又不相等，所以最大正弯矩的作用截面 C 和最大负弯矩的作用截面 B 均可能是危险面。两个截面上的正应力分布如图 5-6d所示。

可以看出，最大压应力发生在 B 截面下边缘的各点处

$$(\sigma_c)_{max}=\frac{M_B z_{max}}{I_y}=\frac{5\times10^6\times88}{7.64\times10^6}\text{MPa}$$

$$=57.6\text{MPa}<[\sigma_c]$$

最大拉应力发生在 C 截面下边缘的各点处，其值为

$$(\sigma_t)_{max}\frac{M_C z_{max}}{I_y}=\frac{3.5\times10^6\times88}{7.64\times10^6}\text{MPa}$$

$$=40.3\text{MPa}>[\sigma_t]$$

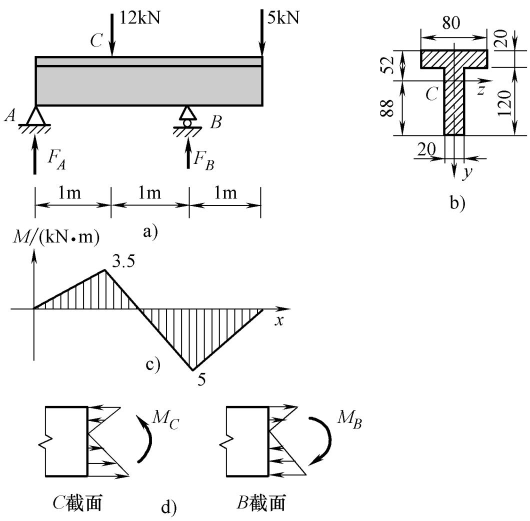


图　5-6

应当注意$(\sigma_t)_{max}$虽然大于［σ_t］，但没超过 5%，故仍然认为是安全的。

例 5-2　如图 5-7a 所示，简支梁由工字钢制成，跨度 $2l=8$m，材料许用应力［σ］= 120MPa。在跨中受集中载荷 $F=30$kN。（1）试选择工字钢型号。（2）当外载荷增至 $F=$ 40kN 时，为了保证强度要求，在选定的工字钢型号基础上，在梁的上下翼缘各焊一长度为 $2a=4$m，截面为 80mm×10mm 的钢板条，如图 5-7c 所示。（3）当 F 提高为 40kN 时，原工字钢型号不变，试校核该梁强度。

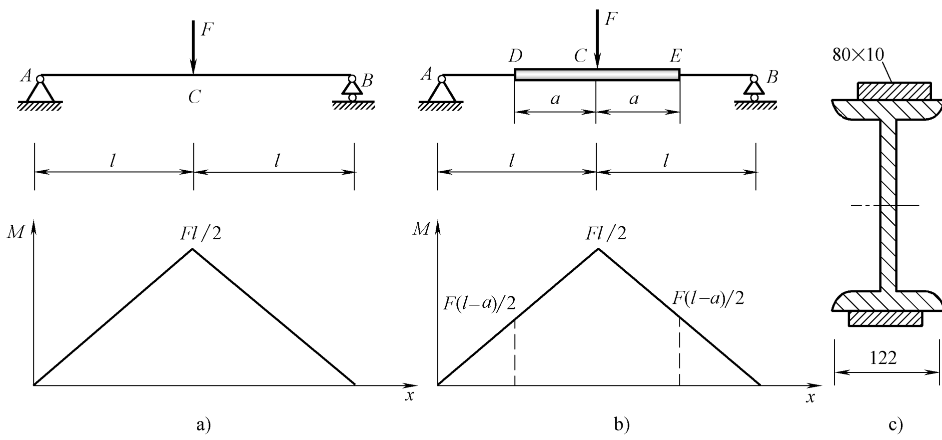


图　5-7

解：（1）绘制弯矩图，如图 5-7a 所示。

根据弯曲正应力强度选择工字钢型号。

图 5-7a 所示的 M_{max}发生在梁的跨中，

$$M_{max}=\frac{F}{2}l=\frac{1}{2}\times30\text{kN}\times4\text{m}=60\text{kN}\cdot\text{m}$$

根据梁的弯曲强度条件

$$W_z \geqslant \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{60\times10^6}{120}\text{mm}^3 = 5\times10^5\text{mm}^3$$

选择 28a 工字钢，截面几何参数为：$W_z = 508\text{cm}^3$，$I_z = 7.11\times10^7\text{mm}^4$

（2）当 $F = 40\text{kN}$，加焊钢板后，截面对中性轴的惯性矩需要使用平行移轴定理：

$$I_z = \left[7.11\times10^7 + 2\times\left(\frac{1}{12}\times80\times10^3 + 80\times10\times145^2\right)\right]\text{mm}^4 = 10.47\times10^7\text{mm}^4$$

焊钢板后的截面能满足梁的强度条件。

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}y_{\max}}{I_z} = \frac{80\times10^6\times150}{10.47\times10^7}\text{MPa} = 115\text{MPa} < [\sigma] = 120\text{MPa}$$

（3）验证在没有焊钢板的截面突变处（D、E 点），梁的强度条件。

$$\sigma_D = \frac{M_D y_{\max}}{I_z} = \frac{F(l-a)}{2}\frac{y_{\max}}{I_z} = \frac{40\times10^3\times(4-2)\times140\times10^{-3}}{2\times7.11\times10^7\times10^{-12}}\text{MPa} = 78.8\text{MPa} < [\sigma]$$

也满足梁的强度条件。

5.4 梁的弯曲切应力及其强度条件

梁受横力弯曲时，虽然横截面上既有正应力 σ，又有切应力 τ。但一般情况下，切应力对梁的强度和变形的影响属于次要因素，因此对由剪力引起的切应力，不再用变形、物理和静力关系进行推导，而是在承认正应力公式（5-2）仍然适用的基础上，假定切应力在横截面上的分布规律，然后根据平衡条件导出切应力的计算公式。

1. 矩形截面梁的弯曲切应力

对于图 5-8 所示的矩形截面梁，横截面上作用剪力 F_S。现分析距中性轴 z 为 y 的横线 aa_1 上的切应力分布情况。根据切应力互等定理，横线 aa_1 两端的切应力必与截面两侧边相切，即与剪力 F_S 的方向一致。由于对称的关系，横线 aa_1 中点处的切应力也必与 F_S 的方向相同。根据这三点切应力的方向，可以设想 aa_1 线上各点切应力的方向皆平行于剪力 F_S。又因截面高度 h 大于宽度 b，切应力的数值沿横线 aa_1 不可能有太大变化，可以认为是均匀分布的。基于上述分析，可做如下假设：

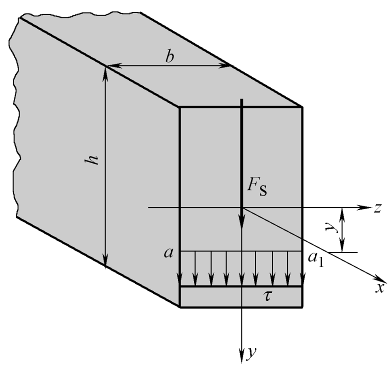


图 5-8　沿截面宽度切应力的分布

1）横截面上任一点处的切应力方向均平行于剪力 F_S。

2）切应力沿截面宽度均匀分布。

基于上述假定得到的解，与精确解相比有足够的精确度。从图 5-9a 所示的横弯梁中截出 dx 微段，其左右截面上的内力如图 5-9b 所示。梁的横截面尺寸如图 5-9c 所示，现欲求距中性轴 z 为 y 的横线 aa_1 处的切应力 τ。过 aa_1 用平行于中性层的纵截面 aa_1cc_1 自 dx 微段中截出一微块（见图 5-9d）。

根据切应力互等定理，微块的纵截面上存在均匀分布的切应力 τ'。微块左右侧面上正应力的合力分别为 F_{N1} 和 F_{N2}，其中

$$F_{N1}=\int_{A^*}\sigma_{\mathrm{I}}\,dA=\int_{A^*}\frac{My_1}{I_z}dA=\frac{M}{I_z}S_z^* \quad (a)$$

$$F_{N2}=\int_{A^*}\sigma_{\mathrm{II}}\,dA=\int_{A^*}\frac{(M+dM)y_1}{I_z}dA=\frac{(M+dM)}{I_z}S_z^* \quad (b)$$

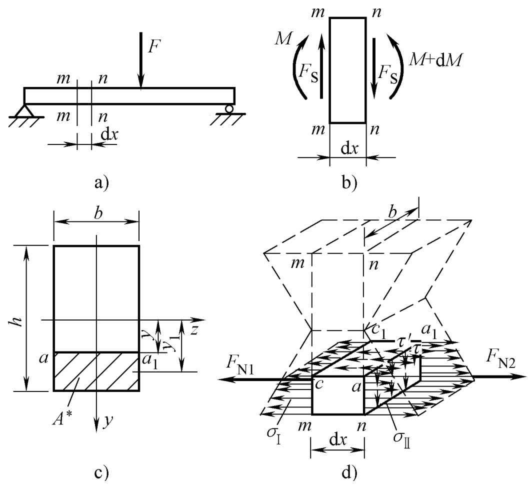


图 5-9　根据微块平衡求切应力

式中，A^* 为微块的侧面面积；σ_{I}（σ_{II}）为面积 A^* 中距中性轴为 y_1 处的正应力；$S_z^*=\int_{A^*}y_1\,dA$。

由微块沿 x 方向的平衡条件 $\sum F_x=0$，得

$$-F_{N1}+F_{N2}-\tau' b\,dx=0 \quad (c)$$

将式（a）和式（b）代入式（c），得

$$\frac{dM}{I_z}S_z^*-\tau' b\,dx=0$$

故

$$\tau'=\frac{dM}{dx}\frac{S_z^*}{bI_z}$$

因 $\frac{dM}{dx}=F_S$，$\tau'=\tau$，故求得横截面上距中性轴为 y 处横线上各点的切应力 τ 为

$$\tau=\frac{F_S S_z^*}{bI_z} \quad (5\text{-}9)$$

式（5-9）也适用于其他截面形式的梁。式中，F_S 为截面上的剪力；I_z 为整个截面对中性轴 z 的惯性矩；b 为横截面在所求应力点处的宽度；S_z^* 为面积 A^* 对中性轴的静矩。

对于矩形截面梁（见图 5-10a），可取 $dA=b\,dy_1$，于是

$$S_z^*=\int_A y_1\,dA=\int_y^{\frac{h}{2}}by_1\,dy_1=\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$$

这样，式（5-9）可写成

$$\tau=\frac{F_S}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$$

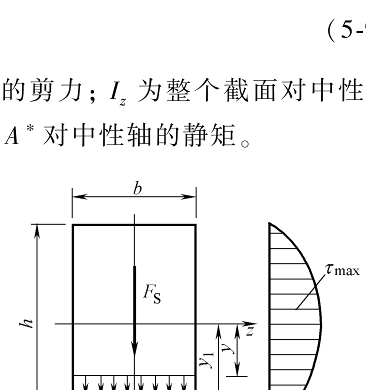


图 5-10　矩形截面切应力的分布

上式表明，沿截面高度切应力 τ 按抛物线规律变化（图 5-10b）。在截面上、下边缘处，$y=\pm\frac{h}{2}$，$\tau=0$；在中性轴上，$z=0$，切应力值最大，其值为

$$\tau_{\max}=\frac{3}{2}\frac{F_S}{A} \tag{5-10}$$

式中，$A=b\times h$，即矩形截面梁的最大切应力是其平均切应力的 3/2 倍。

2. 工字形、T 形等薄壁截面梁的弯曲切应力

工字形截面梁由腹板和翼缘组成。式（5-9）的计算结果表明，在翼缘上切应力很小，在腹板上切应力沿腹板高度按抛物线规律变化，如图 5-11 所示。最大切应力在中性轴上，其值为

$$\tau_{\max}=\frac{F_S(S_z^*)_{\max}}{dI_z}$$

式中，$(S_z^*)_{\max}$为中性轴一侧截面面积对中性轴的静矩。对于轧制的工字钢，式中的$\frac{I_z}{(S_z^*)_{\max}}$可以从型钢表中查得。

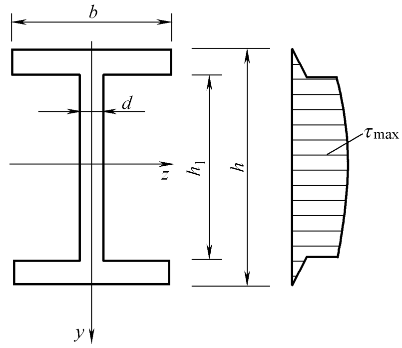


图 5-11　工字形截面切应力的分布

计算结果表明，腹板承担的剪力约为（0.95~0.97）F_S，因此也可用下式计算 $\tau_{\max}$的近似值：

$$\tau_{\max}\approx\frac{F_S}{h_1 d}$$

式中，h_1为腹板的高度；d 为腹板的宽度。

T 形截面梁和槽钢截面梁的最大切应力也在中性轴上，其值仍可以用计算公式（5-9）。要注意此时梁的宽度 b 应当取中性轴与梁的横截面所交线的长度。

3. 圆形截面梁

在圆形截面上（见图 5-12），任一平行于中性轴的横线 aa_1两端处，切应力的方向必切于圆周，并相交于 y 轴上的 c 点。因此，横线上各点切应力方向是变化的。但在中性轴上各点切应力的方向皆平行于剪力 F_S，设其均匀分布，其值为最大。由式（5-9）求得

$$\tau_{\max}=\frac{4}{3}\frac{F_S}{A} \tag{5-11}$$

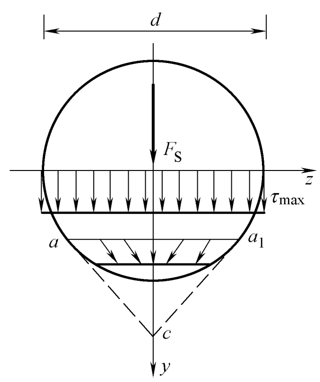


图 5-12　圆形截面切应力的分布

式中，$A=\frac{\pi}{4}d^2$，即圆截面的最大切应力为其平均切应力的4/3倍。

4. 弯曲切应力强度条件

需要指出的是，对于通常的弯曲强度计算，由于梁内最大正应力远大于最大切应力，一般只需要校核梁的正应力强度即可。仅在某些特殊情形下，如图 5-13 所示，①梁的跨度较小而载荷很大并且可移动载荷靠近支座时（如工业厂房中的行车）；②组合的薄壁截面梁（即多层梁板经焊接或铆接连接而成薄壁梁）；③梁沿某一方向的抗剪能力较差（木梁的顺

纹方向、胶合梁的胶合层）等，需进行弯曲切应力强度校核。

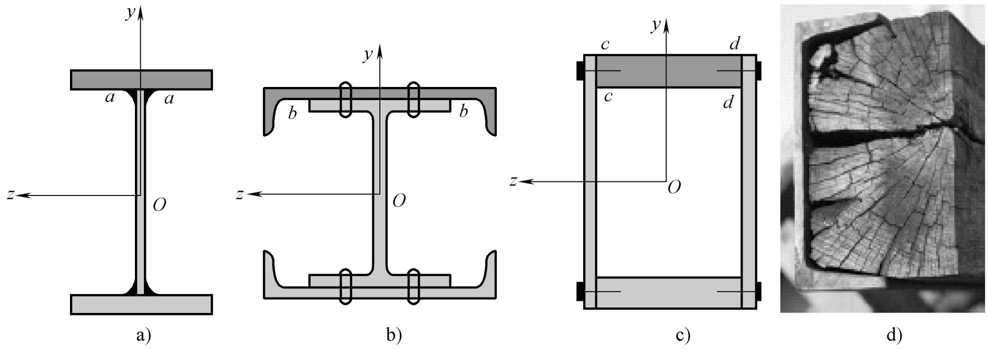


图 5-13　不同形式的薄壁梁

等截面直梁的 τ_{max} 一般发生在 $|F_S|_{max}$ 截面的中性轴上，此处弯曲正应力 $\sigma=0$，微元体处于纯切应力状态，其强度条件为

$$\tau_{max}=\frac{|F_S|_{max}(S_z^*)_{max}}{bI_z}\geqslant[\tau] \tag{5-12}$$

式中，$[\tau]$ 为材料的许用切应力。此时，一般先按正应力的强度条件选择截面的尺寸和形状，然后按切应力强度条件校核。

例 5-3　外伸梁受力如图 5-14a 所示。梁由钢板焊接而成，长度及截面尺寸如图所示。已知材料的弯曲许用正应力 $[\sigma]=120\text{MPa}$，弯曲许用切应力 $[\tau]=60\text{MPa}$，试：（1）校核梁的强度；（2）求焊缝 ab 处的切应力。

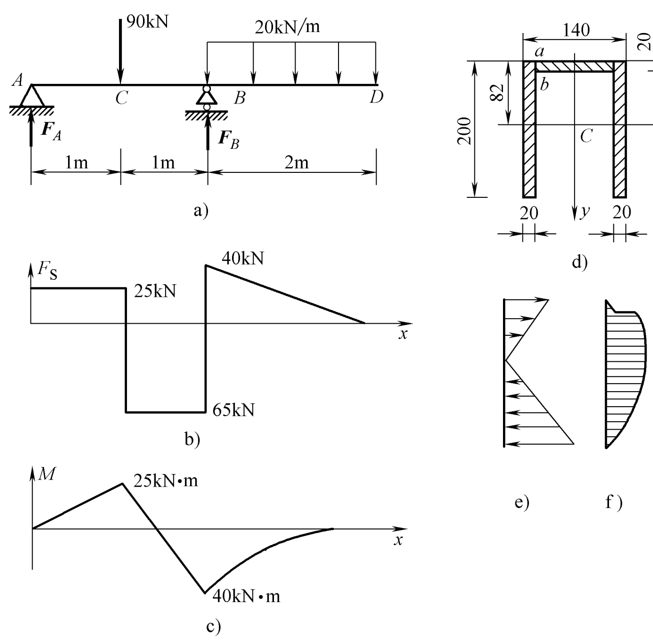


图 5-14　组合截面梁的弯曲切应力

解：（1）求支座反力并画内力图

由平衡条件求得

$$F_A = 25\text{kN}, F_B = 105\text{kN}$$

梁的剪力图和弯矩图分别如图 5-14b、c 所示。$|M|_{\max} = 40\text{kN}\cdot\text{m}$，发生在 B 截面处。$|F_S|_{\max} = 65\text{kN}$，发生在 B 左截面处。

（2）计算截面的几何性质

图 5-14d 中 y 为对称轴。选择参考坐标轴 z_1，确定形心 C 的位置。

$$z_C = \frac{100\times20\times10+2\times200\times20\times100}{100\times20+2\times200\times20}\text{mm} = 82\text{mm}$$

通过形心 C 的 y、z 轴为形心主轴，z 为中性轴。求形心主轴惯性矩 I_z。

$$I_z = \left[\left(\frac{1}{12}\times100\times20^3+100\times20\times72^2\right)+2\times\left(\frac{1}{12}\times20\times200^3+200\times20\times18^2\right)\right]\text{mm}^4 = 3.97\times10^7\text{mm}^4$$

（3）强度校核

沿 B 截面的高度正应力分布如图 5-14e 所示，最大正应力发生在截面的下边缘处，

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}y_{\max}}{I_z} = \frac{40\times10^6\times118}{3.97\times10^7}\text{MPa} = 118.9\text{MPa} < [\sigma] = 120\text{MPa}$$

正应力满足强度要求。

沿 B 左截面的高度切应力分布如图 5-14f 所示，最大切应力发生在中性轴处，

$$(S_z^*)_{\max} = \left(2\times20\times118\times\frac{1}{2}\times118\right)\text{mm}^3 = 2.78\times10^5\text{mm}^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{|F_S|_{\max}(S_z^*)_{\max}}{bI_z} = \frac{65\times10^3\times2.78\times10^5}{2\times20\times3.97\times10^7}\text{MPa} = 11.4\text{MPa} < [\tau] = 60\text{MPa}$$

切应力也满足强度要求。该梁安全。

通过本例可以看出，梁的强度计算主要是满足正应力的强度条件，一般不用校核 $\tau_{\max}$。

（4）焊缝 ab 处的切应力

在焊缝 ab 处将截面截为两部分，求出其中任一部分（例如左部分）对中性轴 z 的静矩：

$$S_z^* = (200\times20\times18)\text{mm}^3 = 7.2\times10^4\text{mm}^3$$

$$\tau_{ab} = \frac{F_S S_z^*}{bI_z} = \frac{65\times10^3\times7.2\times10^4}{20\times3.97\times10^7}\text{MPa} = 5.9\text{MPa}$$

5.5 提高弯曲强度的措施

如前所述，弯曲正应力是影响弯曲强度的主要因素。根据弯曲正应力的强度条件：

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leqslant [\sigma] \tag{5-13}$$

式（5-13）可以改写成内力的形式

$$M_{\max} \leqslant [M] = W_z[\sigma]$$

由以上两式可以看出，提高弯曲强度的措施主要是从三方面考虑：减小最大弯矩、提高抗弯

截面模量和提高材料的力学性能。

1. 减小最大弯矩 M_{max}

（1）改变加载的位置或加载方式　首先，可以通过改变加载位置或加载方式达到减小最大弯矩的目的。例如，当集中力作用在简支梁跨度中间时（见图 5-15a），其最大弯矩为$\frac{1}{4}Fl$；当载荷的作用点移到梁的一侧，如距左侧$\frac{1}{6}l$处（见图 5-15b），则最大弯矩变为$\frac{5}{36}Fl$，是原最大弯矩的 0.56 倍。当载荷的位置不能改变时，可以把集中力分散成较小的力，或者改变成分布载荷，从而减小最大弯矩。例如，利用副梁把作用于跨中的集中力分散为两个集中力（见图 5-15c），而使最大弯矩降低为$\frac{1}{8}Fl$。利用副梁来达到分散载荷，减小最大弯矩是工程中经常采用的方法。

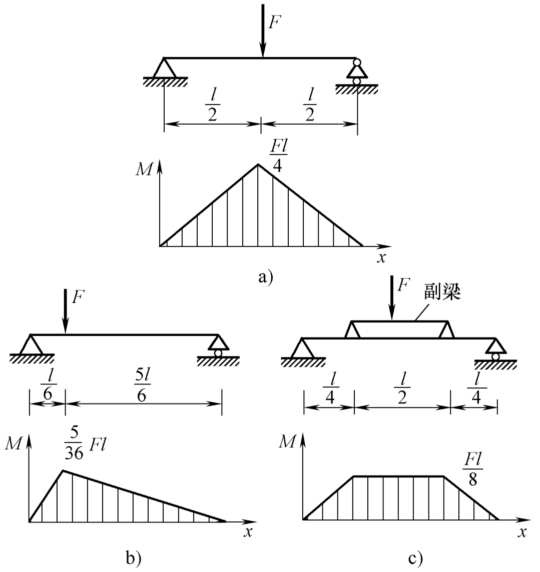


图 5-15　改变加载的位置或加载方式以减小最大弯矩

（2）改变支座的位置　其次，可以通过改变支座的位置来减小最大弯矩。例如，图 5-16a所示受均布载荷的简支梁，$M_{max}=\frac{1}{8}ql^2=0.125ql^2$。若将两端支座各向里移动 0.2$l$（见图 5-16b），则最大弯矩减小为$\frac{1}{40}ql^2$，$M_{max}=\frac{ql^2}{40}=0.025ql^2$ 只及前者的 1/5。图 5-17a 所示为门式起重机的大梁，图 5-17b 所示为锅炉筒体等，其支承点略向中间移动，都是通过合理布置支座位置，以减小 M_{max}的工程实例。

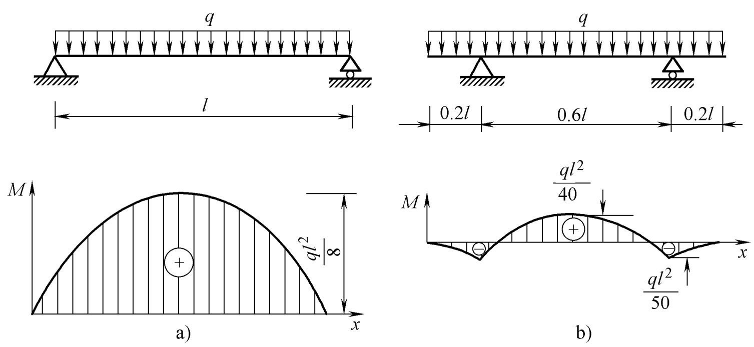


图 5-16　改变支座的位置以减小最大弯矩

2. 提高抗弯截面模量 W_z

（1）选用合理的截面形状　在截面积 A 相同的条件下，抗弯截面模量 W 越大，则梁的

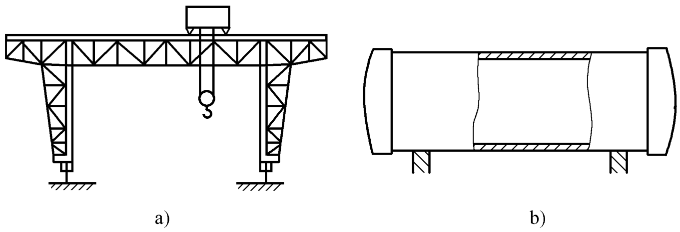
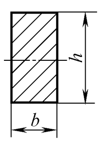
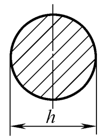
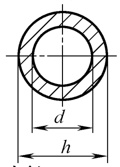
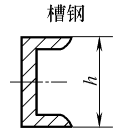
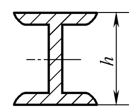


图 5-17　减小最大弯矩的工程实例

承载能力就越高。例如对截面高度 h 大于宽度 b 的矩形截面梁，梁竖放时 $W_1=\frac{1}{6}bh^2$；而梁平放时，$W_2=\frac{1}{6}hb^2$。两者之比是$\frac{W_1}{W_2}=\frac{h}{b}>1$，所以竖放比平放有较高的抗弯能力。当截面的形状不同时，可以用比值$\frac{W}{A}$来衡量截面形状的合理性和经济性。常见截面的 $\frac{W}{A}$值列于表 5-1 中。

表 5-1　常见截面的 W/A 值

矩形	圆形	环形	槽钢	工字钢
		 内径 d=0.8h		
0.167h	0.125h	0.205h	(0.27~0.31)h	(0.29~0.31)h

表中的数据表明，材料远离中性轴的截面（如圆环形、工字形等）比较经济合理。这是因为弯曲正应力沿截面高度线性分布，中性轴附近的应力较小，该处的材料不能充分发挥作用，将这些材料移到离中性轴较远处，则可使它们得到充分利用，形成“合理截面”。工程中的起重机梁、桥梁常采用工字形、槽形或箱形截面，房屋建筑中的楼板采用空心圆孔板，道理就在于此。需要指出的是，对于矩形、工字形等截面，增加截面高度虽然能有效地提高抗弯截面模量；但若高度过大，宽度过小，则在载荷作用下梁会发生扭曲，从而使梁过早地丧失承载能力。

对于拉、压许用应力不相等的材料（例如大多数脆性材料），采用 T 字形等中性轴距上下边不相等的截面较合理。设计时使中性轴靠近拉应力的一侧，以使危险截面上的最大拉应力和最大压应力尽可能同时达到材料的许用应力。

（2）用变截面梁　对于等截面梁，除 $M_{\max}$所在截面的最大正应力达到材料的许用应力外，其余截面的应力均小于最大正应力甚至远小于许用应力。因此，为了节省材料，减轻结构的重量，可在弯矩较小处采用较小的截面，这种截面尺寸沿梁轴线变化的梁称为变截面梁。若使变截面梁每个截面上的最大正应力都等于材料的许用应力，即

$$\sigma_{\max}=\frac{M(x)}{W_z(x)}\approx[\sigma]=\text{const} \tag{5-14}$$

这种梁称为等强度梁。根据式（5-14）知，等强度梁与载荷、结构尺寸以及材料均有关。考

虑到加工的经济性及其他工艺要求，工程实际中只能制作成近似的等强度梁，例如机械设备中的阶梯轴（见图 5-18a）、摇臂钻床的摇臂（图 5-18c）及工业厂房中的鱼腹梁（图 5-18b）等。

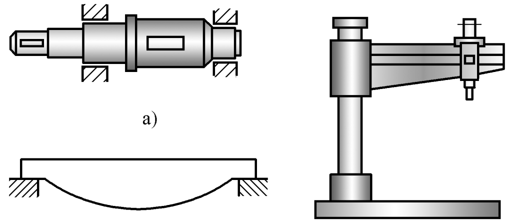


图 5-18　变截面梁的工程实例

3. 提高材料的力学性能

构件选用何种材料，应综合考虑安全、经济等因素。近年来低合金钢生产发展迅速，如 16Mn 钢、15MnTi 钢等。这些低合金钢的生产工艺和成本与普通钢相近，但强度高、韧性好。南京长江大桥广泛采用了 16Mn 钢，与低碳钢相比节约了 15%的钢材。铸铁抗拉强度较低，但价格低廉。铸铁经球化处理成为球墨铸铁后，提高了强度极限和塑性性能。

本章小结

1. 受弯构件横截面上有两种内力——弯矩和剪力。弯矩 M 在横截面上产生正应力 σ；剪力 F_S 在横截面上产生切应力 τ。

2. 已知横截面上的内力，求横截面上的应力属于超静定问题，必须利用变形关系、物理关系和静力平衡关系。

弯矩产生的正应力是影响强度和刚度的主要因素，故对弯曲正应力进行了较严格的推导。剪力产生的切应力对梁的强度和刚度的影响是次要因素，故对切应力公式没做严格推导，先假定了切应力的分布规律，然后用平衡关系直接求出切应力的计算公式。

3. 梁进行强度计算时，主要是满足正应力的强度条件

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}\leqslant[\sigma]$$

某些特殊情况下，还要校核是否满足切应力的强度条件

$$\tau_{\max}=\frac{F_{S\max}(S_z^*)_{\max}}{bI_z}\leqslant[\tau]$$

4. 根据强度条件表达式，提高构件弯曲强度的主要措施是：减小最大弯矩、提高抗弯截面模量和材料性能。

思考题

5-1　根据公式 $\sigma=\dfrac{My}{I_z}$ 的推导过程，说明此公式在使用时，应当满足哪些条件？

5-2　通过公式 $\sigma_{\max}=\dfrac{M}{W_z}$ 分析，用哪些方法可以提高梁的弯曲强度？

5-3　试说明矩形截面简支梁在（向下）均布载荷作用时，最大弯矩横截面上正应力和切应力的分布情况，并画出分布图。

5-4　城市里的高架混凝土桥的横截面通常呈 T 形状，此梁在横截面上的正应力分布特点如何？按照材料力学理论说明对于混凝土梁，这样的正应力分布规律是否合理？如果不合理，应当如何改进？

5-5　受集中载荷作用的悬臂梁其截面形状如图 5-19 所示。

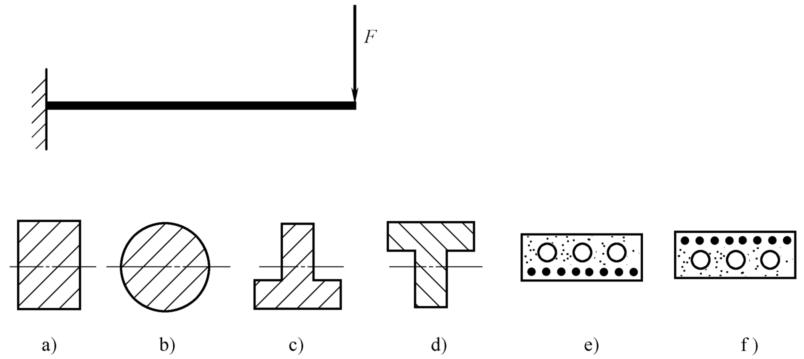


图 5-19　思考题 5-5 图

（1）梁的材料为钢时，应选__________截面为最好；

（2）梁的材料为铸铁时，应选__________截面为最好；

（3）梁的材料为钢筋混凝土时，应选__________截面为最好。

5-6　试指出下列概念的区别：中性轴与形心轴、纯弯曲与横力弯曲、惯性矩与极惯性矩、弯曲刚度与抗弯截面模量。

5-7　圆轴扭转时横截面之间产生相对转动，梁发生平面弯曲时横截面之间也产生相对转动，试问两者有何不同？

5-8　两根矩形截面梁，分别由碳钢和黄铜制成。如果两根梁的尺寸、形状以及所受载荷完全相同，试问：

（1）两根梁内的最大弯曲应力是否相同？

（2）两根梁发生的最大弯曲变形量是否相同？

5-9　在小学生的科技活动中，要求用报纸卷成筒并填满沙土成为沙棒，然后此沙棒抬一桶水。为了在运输过程中沙棒不发生弯曲破坏，你有什么好办法？

5-10　图 5-20 所示直径为 d 的圆木，现需从中切取一矩形截面梁。试问：

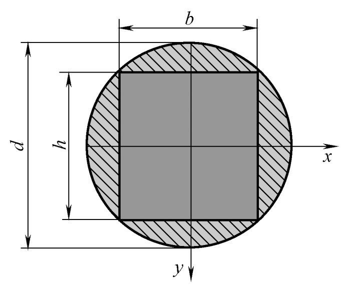


图 5-20　思考题 5-10 图

（1）如欲使所切矩形梁的弯曲强度最高，h/b 为何值？

（2）如欲使所切矩形梁的弯曲刚度最高，h/b 为何值？

5-11　梁发生平面弯曲时，其横截面绕__________旋转。

（A）梁的轴线；　　（B）中性轴；　　（C）截面的对称轴；　（D）截面的上（或下）边缘。

5-12　横力弯曲梁的横截面上同时存在剪力和弯矩，弯矩 M 是__________。

（A）横截面切向分布内力的合力；

（B）横截面切向分布内力的合力偶矩；

（C）横截面法向分布内力的合力偶矩；

（D）横截面法向分布内力的合力。

5-13　材料和横截面均相同的两根梁，变形后其轴线为两同心圆弧，如图 5-21 所示。梁 a、b 内的最大弯曲正应力分别为 σ_a 和 σ_b，则比较两者可知__________。

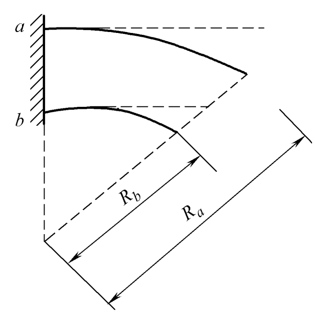


图 5-21　思考题 5-13 图

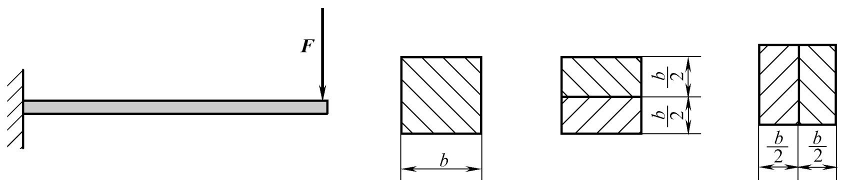
（A）$\sigma_a<\sigma_b$；
（B）$\sigma_a=\sigma_b$；
（C）$\sigma_a>\sigma_b$；
（D）其大小关系不定。

5-14　等强度梁的截面尺寸__________。

（A）与载荷和许用应力均无关；　　（B）与载荷和许用应力均有关；
（C）与载荷有关，而与许用应力无关；　　（D）与载荷无关，而与许用应力有关。

5-15　三根正方形截面梁如图 5-22 所示，其长度、横截面面积和受力状态相同，其中 5-22b、c 所示梁的截面为两个形状相同的矩形拼合而成，拼合后无胶接。在三根梁中，__________梁内的正应力相等。

（A）图 5-22a、b　　（B）图 5-22a、c　　（C）图 5-22b、c　　（D）图 5-22a、b、c



a)　　b)　　c)

图 5-22　思考题 5-15 图

5-16　图 5-23 所示工字钢简支梁，弹性模量 $E=200\text{GPa}$。若在力偶 M_0 作用下测得横截面 A 处梁顶面的纵向应变 $\varepsilon=3.0\times10^{-4}$，则梁内最大弯曲正应力 $\sigma_{\max}=$__________。

（A）30MPa　　（B）60MPa　　（C）120MPa　　（D）18MPa

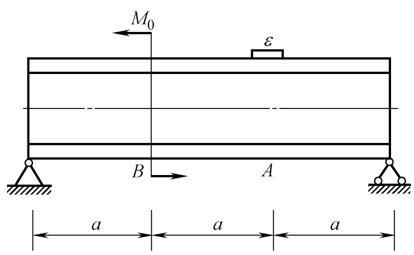


图 5-23　思考题 5-16 图

5-17　T 形截面铸铁材料悬臂梁受力如图 5-24 所示，z 轴为中性轴，横截面合理布置的方案应为__________。

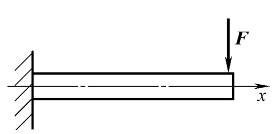
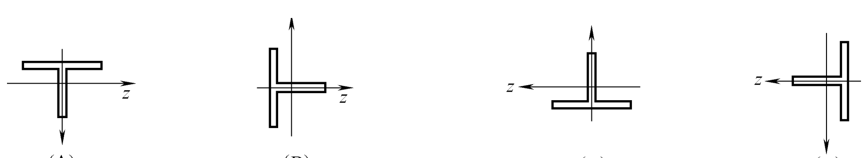


图 5-24　思考题 5-17 图



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

习 题

5-1　如图 5-25 所示，把直径 $d=1\text{mm}$ 的钢丝绕在半径为 $R_0=2\text{m}$ 的卷筒上，试计算该钢丝中产生的最大应力。设 $E=200\text{GPa}$。

5-2　矩形截面的悬臂梁受集中力和集中力偶作用，如图 5-26 所示。试求Ⅰ—Ⅰ截面和固定端Ⅱ—Ⅱ截面上 A、B、C、D 四点处的正应力。

5-3　一外径为 250mm、壁厚为 10mm、长度 $l=12\text{m}$ 的铸铁水管，两端搁在支座上，管中充满着水，如图 5-27 所示。铸铁的密度 $\rho=7.755\times10^3\text{kg/m}^3$，水的密度 $\rho=1.02\times10^3\text{kg/m}^3$。试求管内最大拉、压正应力的数值。

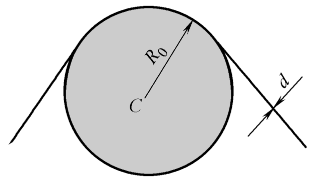


图 5-25　题 5-1 图

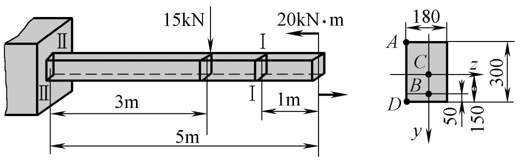


图 5-26　题 5-2 图

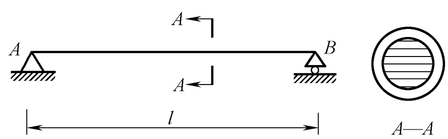


图 5-27　题 5-3 图

5-4　简支梁承受均布载荷如图 5-28 所示。若分别采用截面积相等的实心和空心圆截面，且 $D_1=40\text{mm}$，$\dfrac{d_2}{D_2}=\dfrac{3}{5}$，试分别计算它们的最大正应力。并问空心截面比实心截面的最大正应力减少了百分之几？

5-5　某圆轴的外伸部分系空心圆截面，载荷情况如图 5-29 所示。试作该轴的弯矩图，并求轴内的最大正应力。

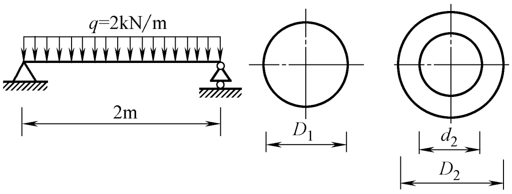


图 5-28　题 5-4 图

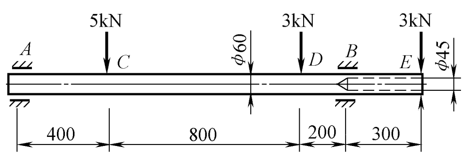


图 5-29　题 5-5 图

5-6　矩形截面悬臂梁如图 5-30 所示。已知 $l=4\text{m}$，$b/h=2/3$，$q=10\text{kN/m}$，$[\sigma]=10\text{MPa}$。试确定此梁横截面的尺寸。

5-7　20a 工字钢梁的支承和受力情况如图 5-31 所示。若 $[\sigma]=160\text{MPa}$，试求许可载荷 F。

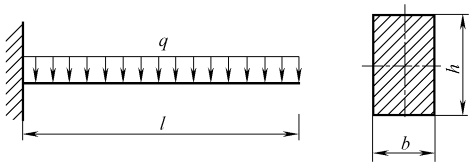


图 5-30　题 5-6 图

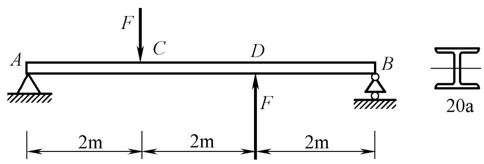


图 5-31　题 5-7 图

5-8　如图 5-32 所示，桥式起重机大梁 AB 的跨度 $l=16\text{m}$，原设计最大起重量为 100kN。在大梁上距 B 端为 x 的 C 点悬挂一根钢索，绕过装在重物上的滑轮，将另一端再挂在起重机的吊钩上，使起重机驶到 C

的对称位置 D。这样就可吊运 150kN 的重物。试问 x 的最大值为多大？设只考虑大梁的正应力强度。

5-9　图 5-33 所示轧辊轴直径 $D=280\text{mm}$，跨度 $L=1000\text{mm}$，$l=450\text{mm}$，$b=100\text{mm}$。轧辊材料的弯曲许用应力 $[\sigma]=100\text{MPa}$。求轧辊能承受的最大轧制力。

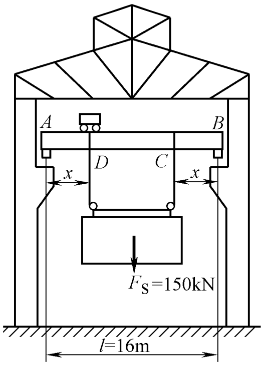


图 5-32　题 5-8 图

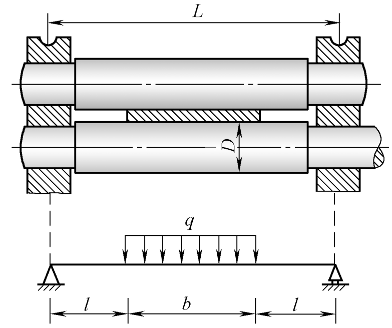


图 5-33　图 5-9 图

5-10　压板的尺寸和载荷情况如图 5-34 所示。材料为 45 钢，$\sigma_s=380\text{MPa}$，取安全因数 $n=1.5$，试校核压板的强度。

5-11　图 5-35 所示为一承受弯曲的铸铁梁，其截面为⊥形，材料的拉伸和压缩许用应力之比 $[\sigma_t]/[\sigma_c]=1/4$。求水平翼板的合理宽度 b。

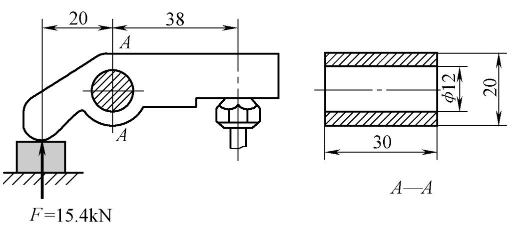


图 5-34　题 5-10 图

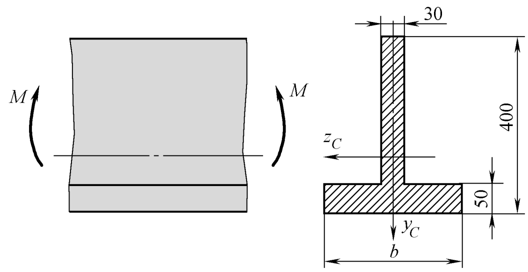


图 5-35　题 5-11 图

5-12　矩形截面梁的尺寸及载荷如图 5-36 所示。试求Ⅰ—Ⅰ截面上，在画阴影线的面积内，由 $\sigma\text{d}A$ 组成的内力系的合力。

5-13　铸铁梁的载荷及横截面尺寸如图 5-37 所示。许用拉应力 $[\sigma_t]=40\text{MPa}$，许用压应力 $[\sigma_c]=160\text{MPa}$。试按正应力强度条件校核梁的强度。

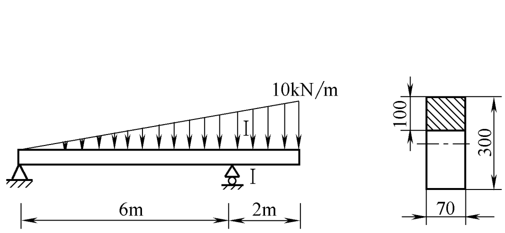


图 5-36　题 5-12 图

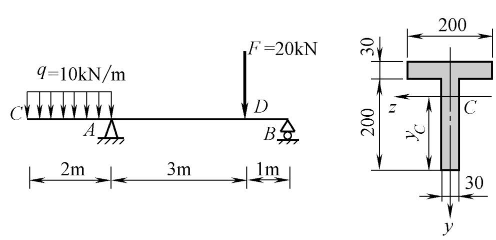


图 5-37　题 5-13 图

5-14　起重机下的梁由两根工字钢组成，起重机自重 $G=50\text{kN}$，起重量 $P=10\text{kN}$，如图 5-38 所示。许用应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$，$[\tau]=100\text{MPa}$。若暂不考虑梁的自重，试按正应力强度条件选定工字钢型号，然后

再按切应力强度条件进行校核。

5-15　由三根木条胶合而成的悬臂梁截面尺寸如图 5-39 所示，跨度 $l=1\text{m}$。若胶合面上的许用切应力为 0.34MPa，木材的许用弯曲正应力为 $[\sigma]=10\text{MPa}$，许用切应力为 $[\tau]=1\text{MPa}$。试求许可载荷 F。

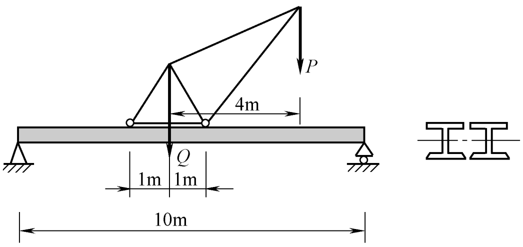


图 5-38　题 5-14 图

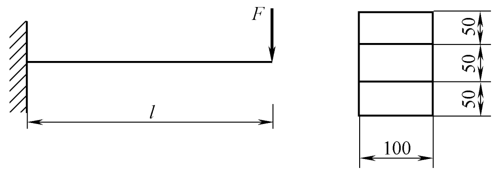


图 5-39　题 5-15 图

5-16　一铸铁梁如图 5-40 所示。已知材料的抗拉强度极限 $(\sigma_b)_t=150\text{MPa}$，抗压强度极限 $(\sigma_b)_c=630\text{MPa}$。试求此梁的安全因数。

5-17 由工字钢制成的简支梁受力如图 5-41 所示。已知材料的许用弯曲正应力 $[\sigma]=170\text{MPa}$，许用切应力 $[\tau]=100\text{MPa}$。试选择工字钢型号。

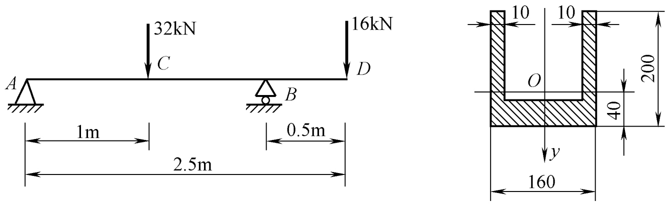


图 5-40　题 5-16 图

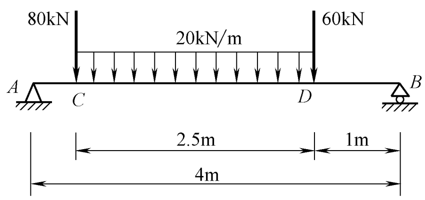


图 5-41　题 5-17 图

第6章 弯曲变形

内容梗概：梁的弯曲变形用挠度和转角度量。挠度是梁的轴线上任一点沿竖直方向的位移，用 v 表示；转角是挠度曲线上某点的切线与 x 轴的夹角，用 θ 表示。梁变形后，轴线由直线变为一条连续光滑的曲线，称为挠度曲线，用 $v(x)$ 表示。忽略横向剪力，根据平面假定，在线弹性和小变形条件下，可以得到挠曲线的近似微分方程。经过二次不定积分求积，分别得到含待定常数的转角和挠曲方程，进一步根据边界条件和连续条件可以确定积分常数。在小变形和弹性范围内，梁的位移与载荷为线性关系，在工程应用中可以用叠加法求梁的位移。梁弯曲变形的刚度条件中涉及变形许用值是根据工程经验确定的，可从有关手册中查得。弯曲变形量与外加载荷、抗弯刚度 EI、跨度长短及支座情况有关。在实践中可以通过调整加载方式、减小跨长或增加支座以减小弯矩；选用合理截面形状；选用合适的材料以增加弹性模量来以减小挠度和转角。

6.1 梁的挠度和转角

在线弹性小变形条件下，梁在横力作用时将产生平面弯曲，则梁轴线由原来的直线变为纵向对称面内的一条连续光滑的曲线，这条曲线称为梁的挠曲线。梁轴线上某点在梁变形后沿竖直方向的位移称为该点的挠度。将直梁的轴线与水平坐标轴重合，则挠度是坐标的函数 $v=v(x)$，称为挠曲线方程。在小变形情况下，梁轴线上各点在梁变形后沿轴线方向的位移可以证明是横向位移的高阶小量，因而可以忽略不计。挠度的正负号规定：挠度沿 v 轴的正向为正，反之为负。变形后横截面绕中性轴转动的角度称为转角。转角的正负号规定：逆时针转动时为正，反之为负。一般地，在梁的不同横截面处，转角是不同的。因此称转角 θ 随梁轴线变化的函数 $\theta=\theta(x)$ 为转角方程。

由图6-1可以看出，转角实质上就是挠曲线的切线与梁的轴线坐标轴 x 的正方向之间的夹角。所以有 $\tan\theta=\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$。由于限于梁发生小变形，则梁的挠度和转角都很小，所以 θ 和 $\tan\theta$ 是同阶小量，即 $\theta\approx\tan\theta$，于是有挠度和转角的关系：

$$\theta(x)=v'(x) \tag{6-1}$$

即转角函数等于挠度函数对 x 的一阶导数。

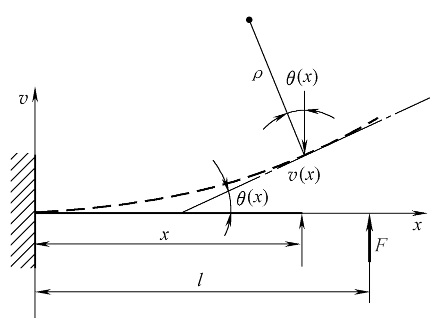


图6-1 梁弯曲变形的挠度与转角

6.2 挠曲线的近似微分方程

忽略剪力对变形的影响，梁平面弯曲的曲率公式为

$$\frac{1}{\rho(x)}=\frac{M(x)}{EI_z} \tag{a}$$

根据高等数学知识，梁轴线上任一点的曲率与挠曲线方程 $v(x)$ 之间存在下列关系：

$$\frac{1}{\rho(x)}=\pm\frac{v''(x)}{\{1+[v'(x)]^2\}^{\frac{3}{2}}} \tag{b}$$

将式（b）代入式（a），得到

$$\pm\frac{v''(x)}{\{1+[v'(x)]^2\}^{\frac{3}{2}}}=\frac{M(x)}{EI_z} \tag{c}$$

小挠度条件下，$v'(x)=\theta<<1$，式（c）可简化为

$$\pm v''(x)=\frac{M(x)}{EI_z} \tag{d}$$

在图 6-2 所示的坐标系中，正弯矩对应着 $v''(x)$（即平面曲线的曲率）的正值（见图 6-2a），负弯矩对应着 $v''(x)$ 的负值（见图 6-2b），故式（d）左边的符号取正值，并且将对于中心轴的惯性矩 I_z 简记为 I，则有

$$EIv''(x)=M(x) \tag{6-2}$$

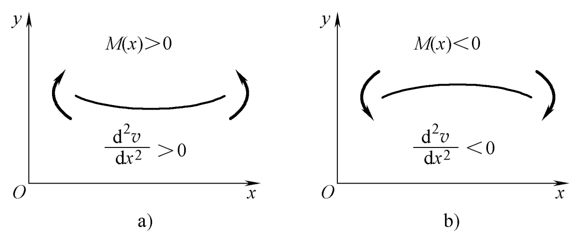


图 6-2　微分方程正负与坐标系的关系

式（6-2）称为挠曲线的近似微分方程。显然，此微分方程仅适用于在线弹性范围内发生小变形的平面弯曲问题。其近似性体现在忽略了横向剪切影响和不计 $[v'(x)]^2$ 项。

6.3 用积分法求梁的位移

将式（6-2）所表示的二阶常微分方程采用不定积分求积，分别对 x 积分一次和二次，便得到梁的转角方程和挠度方程：

$$EI\theta(x)=EIv'(x)=\int M(x)\,dx+C \tag{a}$$

$$EIv(x)=\iint M(x)\,dx\,dx+Cx+D \tag{b}$$

其中 C、D 为积分常数，由边界条件和连续条件确定。

对于载荷无突变的情形，梁上的弯矩可以用一个函数来描述，则式（a）和式（b）中将仅有两个积分常数，由梁的边界条件（又称为支承条件或约束条件）即支座对梁的挠度和转角提供的限制条件来确定。

常见的梁的边界条件：

（1）在固定铰支座和滚动铰支座处，挠度 $v=0$；

（2）在固定端约束处，挠度 $v=0$ 和转角 $\theta=0$；

（3）在弹簧约束处，设 F_R 为弹簧约束力，k 为弹簧系数，挠度 $v=-F_R/k$。

两种典型的边界条件的表达式如图 6-3 所示。

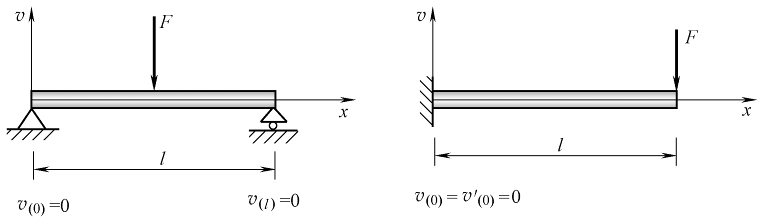


图 6-3　梁的边界条件

对于变截面阶梯梁以及载荷有突变（集中力、集中力偶、分布载荷间断等）的情况，弯矩方程需要分段描述。对式（a）和式（b）必须分段积分，每增加一段就多出两个积分常数。由于梁的挠度曲线为一连续光滑曲线，在分段点处，相邻两段的挠度和转角值必须对应相等。于是每增加一段就多提供两个确定积分常数的条件，这就是连续条件。

例 6-1　图 6-4 所示为一长为 l、抗弯刚度为 EI 的悬壁梁，在自由端受集中力 F 作用，试求此梁的挠度方程为转角方程，并确定其最大挠度和转角。

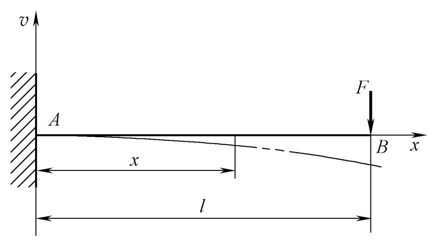


图　6-4

解：如图所示建立坐标系，容易得出任意截面上的弯矩为

$$M(x)=-F(l-x)=-Fl+Fx$$

代入式（6-2），得挠曲线近似微分方程

$$EIv''(x)=-Fl+Fx$$

将上述方程积分两次，得

$$EIv'=-Flx+\frac{F}{2}x^2+C \tag{a}$$

$$EIv(x)=-\frac{Fl}{2}x^2+\frac{F}{6}x^3+Cx+D \tag{b}$$

如前所述，悬臂梁的位移边界条件是固定端处的挠度和转角都等于零，即 $v(0)=v'(0)=0$。将上述边界条件应用于式（a）和式（b），得

$$C=0,D=0$$

由此得到自由端受集中力作用的悬臂梁的转角方程

$$\theta(x)=v'=-\frac{Fx}{2EI}(2l-x) \tag{c}$$

以及挠曲线方程

$$v(x)=-\frac{Fx^2}{6EI}(3l-x) \tag{d}$$

此梁的最大挠度和转角均发生在自由端截面 B 即 $x=l$ 处，分别为

$$\theta_{\max}=-\frac{Fl^2}{2EI},v_{\max}=-\frac{Fl^3}{3EI}$$

例 6-2 如图 6-5 所示一长为 l 的简支梁，抗弯刚度为 EI，受集中力 F 作用，试确定挠曲线及转角方程。

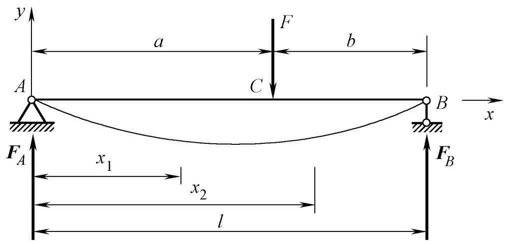


图 6-5

解： 由梁的平衡方程可求得铰链 A 的约束力

$$F_A=\frac{Fb}{l}$$

分段列出 AC 段和 CB 段的弯矩方程。AC 段弯矩方程 $M_1(x_1)$ 为

$$M_1(x_1)=\frac{Fb}{l}x_1(0\leqslant x_1\leqslant a)$$

CB 段的弯矩方程 $M_2(x_2)$ 为

$$M_2(x_2)=\frac{Fb}{l}x_2-F(x_2-a)\quad(a\leqslant x_2\leqslant l)$$

分别积分后得到 AC 段和 CB 段的转角方程和挠曲线方程

$$\begin{cases}EI\theta_1(x_1)=\int M_1(x_1)\mathrm{d}x_1=\dfrac{Fb}{2l}x_1^2+C_1\\ EIv_1(x_1)=\int EI\theta_1(x_1)\mathrm{d}x_1=\dfrac{Fb}{6l}x_1^3+C_1x_1+D_1\end{cases}\quad(0\leqslant x_1\leqslant a)$$

$$\begin{cases}EI\theta_2(x_2)=\int M_2(x_2)\mathrm{d}x_2=\dfrac{Fb}{2l}x_2^2-\dfrac{F}{2}(x_2-a)^2+C_2\\ EIv_2(x_2)=\int EI\theta_2(x_2)\mathrm{d}x_2=\dfrac{Fb}{6l}x_2^3-\dfrac{F}{6}(x_2-a)^3+C_2x_2+D_2\end{cases}\quad(a\leqslant x_2\leqslant l)$$

梁在 C 处的转角及挠度连续，即 $x_1=x_2=a$ 时，$\theta_1(a)=\theta_2(a),v_1(a)=v_2(a)$。代入 AC 段和 CB 段的转角及挠曲线方程，有

$$C_1=C_2,D_1=D_2$$

梁 A、B 两端均为铰链约束，其边界条件为 $v_1(0)=v_2(l)=0$，由此可得到

$$D_1=D_2=0,C_1=C_2=-\frac{Fb}{6lEI}(l^2-b^2)$$

由此不难写出 AC 段和 CB 段的转角及挠曲线方程。

$$\begin{cases}\theta_1(x_1)=\dfrac{Fb}{6EIl}(3x_1^2-l^2+b^2)\\ v_1(x_1)=\dfrac{Fbx_1}{6EIl}(x_1^2-l^2+b^2)\end{cases}\quad(0\leqslant x_1\leqslant a)$$

$$\begin{cases}\theta_2(x_2)=\dfrac{Fb}{2EIl}x_2^2-\dfrac{F}{2EI}(x_2-a)^2-\dfrac{Fb}{6EIl}(l^2-a^2)\\ v_2(x_2)=\dfrac{Fa(l-x_2)}{6EIl}(x_2^2+a^2-2lx_2)\end{cases}\quad(a\leqslant x_2\leqslant l)$$

最大转角可能发生在 A 端面或者 B 端面处，其值为 $\theta_A=-\dfrac{Fab(b+l)}{6EIl}$ 和 $\theta_B=-\dfrac{Fab(a+l)}{6EIl}$。

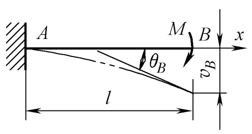
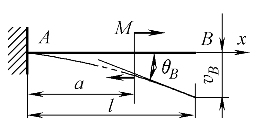
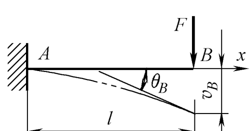
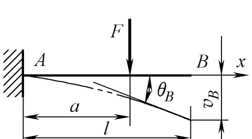
可以证明，最大挠度发生在 $x_0=\sqrt{\dfrac{l^2-b^2}{3}}$ 截面处，其值为 $v_{\max}=-\dfrac{Fb\sqrt{(l^2-b^2)^3}}{9\sqrt{3}EIl}$。

当集中力 F 作用在梁中点时，即 $a=b=0.5l$，此时梁最大挠度发生在中点处，其值为 $v_{0.5l}=-\dfrac{Fb}{48EI}(3l^2-4b^2)$。

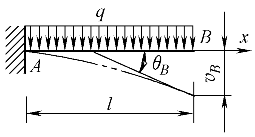
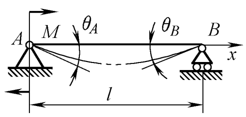
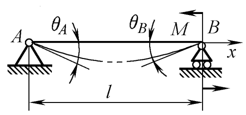
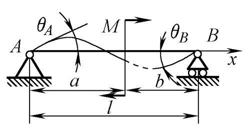
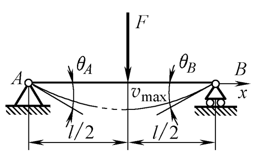
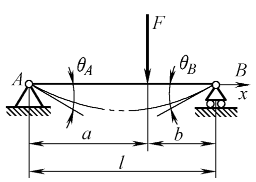
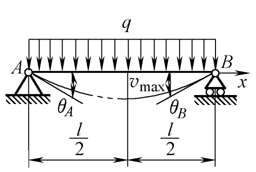
注意当集中力 F 无限靠近 B 端面时，即 $b\to0$，最大挠度发生在 $x_0=\dfrac{l}{\sqrt{3}}=0.577l$ 截面处，这说明，即使载荷 F 无限靠近梁端支座，梁最大挠度所在位置仍然与梁的中点非常靠近。因此，在工程实践中，为计算方便，可以近似地以梁中点挠度来代替实际最大挠度，其误差不超过 3%。

积分法是求梁变形的一种基本方法，其优点是可以直接运用高等数学方法求得各种约束和载荷条件下，梁的转角方程和挠度方程。但是当仅需要求梁某特定截面的转角或挠度时，此方法的运算过程则显得烦冗。为了应用方便，一般设计手册中已经将常用量的转角和挠度的计算公式列成表格，以备查用。表 6-1 给出了在简单载荷作用下梁的转角和挠度公式以及相关的数据。

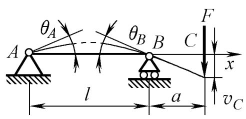
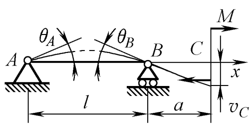
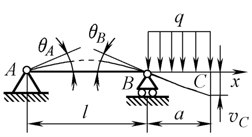
表 6-1　梁在简单载荷作用下的变形

序号	梁的计算简图	挠度曲线方程	端截面转角	最大挠度
1		$v=-\dfrac{Mx^2}{2EI}$	$\theta_B=-\dfrac{Ml}{EI}$	$v_B=-\dfrac{Ml^2}{2EI}$
2		$v=-\dfrac{Mx^2}{2EI},0\leqslant x\leqslant a$ $v=-\dfrac{Ma}{EI}\left[(x-a)+\dfrac{a}{2}\right]$, $a\leqslant x\leqslant l$	$\theta_B=-\dfrac{Ma}{EI}$	$v_B=-\dfrac{Ma}{EI}\left(l-\dfrac{a}{2}\right)$
3		$v=-\dfrac{Fx^2}{6EI}(3l-x)$	$\theta_B=-\dfrac{Fl^2}{2EI}$	$v_B=-\dfrac{Fl^3}{3EI}$
4		$v=-\dfrac{Fx^2}{6EI}(3a-x)$, $0\leqslant x\leqslant a$ $v=-\dfrac{Fa^2}{6EI}(3x-a)$, $a\leqslant x\leqslant l$	$\theta_B=-\dfrac{Fa^2}{2EI}$	$v_B=-\dfrac{Fa^2}{6EI}(3l-a)$

（续）

序号	梁的计算简图	挠度曲线方程	端截面转角	最大挠度
5		$v=\frac{-qx^2}{24EI}(x^2-4lx+6l^2)$	$\theta_B=-\frac{ql^3}{6EI}$	$v_B=-\frac{ql^4}{8EI}$
6		$v=-\frac{Mx}{6EIl}(l-x)(2l-x)$	$\theta_A=-\frac{Ml}{3EI}$ $\theta_B=\frac{Ml}{6EI}$	$x_0=\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)l$ 处， $v_{\max}=\frac{-Ml^2}{9\sqrt{3}EI}$ $v_{l/2}=\frac{-Ml^2}{16EI}$
7		$v=-\frac{Mx}{6EIl}(l^2-x^2)$	$\theta_A=-\frac{Ml}{6EI}$ $\theta_B=\frac{Ml}{3EI}$	$x_0=\frac{l}{\sqrt{3}}$处， $v_{\max}=-\frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EI}$ $v_{l/2}=-\frac{Ml^2}{16EI}$
8		$v=\frac{Mx}{6EIl}(l^2-3b^2-x^2)$， $0\leqslant x\leqslant a$ $v=-\frac{M(l-x)}{6EIl}[l^2-3a^2$ $-(l-x)2]$，$a\leqslant x\leqslant l$	$\theta_A=\frac{M}{6EIl}(l^2-3b^2)$ $\theta_B=\frac{M}{6EIl}(l^2-3a^2)$ $\theta_C=-\frac{M}{6EIl}(3a^2+3b^2-l^2)$	$x_1=\sqrt{\frac{l^2-3b^2}{3}}$处， $v_1=\frac{M\sqrt[2]{(l^2-3b^2)^3}}{9\sqrt{3}EIl}$ $x_2=\sqrt{\frac{l^2-3a^2}{3}}$处， $v_2=\frac{M\sqrt[2]{(l^2-3a^2)^3}}{9\sqrt{3}EIl}$
9		$v=\frac{-Fx}{48EI}(3l^2-4x^2)$， $0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}$	$\theta_A=-\frac{Fl^2}{16EI}$ $\theta_B=\frac{Fl^2}{16EI}$	$v_{\max}=-\frac{Fl^3}{48EI}$
10		$v=-\frac{Fbx}{6EIl}(l^2-b^2-x^2)$， $0\leqslant x\leqslant a$ $v=-\frac{Fb}{6EIl}[\frac{l}{b}(x-a)^3+$ $(l^2-b^2)x-x^3]$， $a\leqslant x\leqslant l$	$\theta_A=\frac{-Fab}{6EI}(l+b)$ $\theta_B=\frac{Fab}{6EI}(l+a)$	设 $a>b$，在 $x_0=\sqrt{(l^2-b^2)/3}$处， $v_{\max}=-\frac{\sqrt{3}Fb}{27EIl}\cdot(l^2-b^2)^{\frac{3}{2}}$ $v_{l/2}=-\frac{Fb}{48EI}\cdot(3l^2-4b^2)$
11		$v=-\frac{qx}{24EI}(l^3-2lx^2+x^3)$	$\theta_A=-\frac{ql^3}{24EI}$ $\theta_B=\frac{ql^3}{24EI}$	$x_0=\frac{l}{2}$处， $v_{\max}=-\frac{5ql^4}{384EI}$

（续）

序号	梁的计算简图	挠度曲线方程	端截面转角	最大挠度
12		$v=-\frac{Fax}{6EIl}(x^2-l^2)$, $0\leqslant x\leqslant l$ $y=\frac{-F(x-l)}{6EI}[a(3x-l)-(x-l)^2]$, $l\leqslant x\leqslant l+a$	$\theta_A=\frac{Fal}{6EI}$ $\theta_B=-\frac{Fal}{3EI}$ $\theta_C=-\frac{Fa}{6EI}(2l+3a)$	$x_1=\frac{l}{\sqrt{3}}$处, $v_1=\frac{Fal^2}{9\sqrt{3}EI}$ $x_C=l+a$ 处, $v_C=-\frac{Fa^2(l+a)}{3EI}$
13		$v=\frac{Mx}{6EIl}(l^2-x^2)$, $0\leqslant x\leqslant l$ $y=-\frac{M}{6EI}(3x^2-4xl+l^2)$ $l\leqslant x\leqslant l+a$	$\theta_A=-\frac{Ml}{6EI}$ $\theta_B=\frac{Ml}{3EI}$ $\theta_C=\frac{M}{3EI}(l+3a)$	$x_1=\frac{l}{\sqrt{3}}$处, $v_1=\frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EI}$ $x_C=l+a$ 处, $v_C=-\frac{Ma(2l+3a)}{6EI}$
14		$v=\frac{qa^2}{12EI}\left(lx-\frac{x^3}{l}\right)$, $0\leqslant x\leqslant l$ $v=\frac{-qa^2}{12EI}\left[\frac{x^3}{l}+\frac{(x-l)^4}{2a^2}-\frac{(2l+a)(x-l)^3}{al}-lx\right]$ $l\leqslant x\leqslant l+a$	$\theta_A=\frac{qa^2l}{12EI}$ $\theta_B=-\frac{qa^2l}{6EI}$ $\theta_C=-\frac{qa^2}{6EI}(l+a)$	$x_1=\frac{l}{\sqrt{3}}$处, $v_1=\frac{qa^2l^2}{18\sqrt{3}EI}$ $x_C=l+a$ 处, $v_C=-\frac{qa^3}{24EI}(3a+4l)$

6.4 用叠加法求梁的位移

在材料服从胡克定律和小变形的条件下，挠曲线近似微分方程是一个线性微分方程，由此得到的挠度和转角均与外加载荷呈线性关系。因此，当梁承受复杂载荷时，可将其分解成几种简单载荷，利用梁在简单载荷作用下的位移计算结果，叠加后得到梁在复杂载荷作用下的挠度和转角，因此可应用叠加法来求解梁的变形。可以采用多种形式叠加求解梁的变形。

1. 多个载荷直接叠加

对于给定的梁，如果各项载荷单独作用时，梁的挠度和转角公式已知，就可以采用此方法直接查表 6-1，将每个载荷引起的梁的变形进行叠加即可。注意：在具体使用叠加法时，为了方便起见和避免书写麻烦，一般不采用前述的挠度和转角的正负号规定，可视情况而定其正方向，求解完毕后注明其方向即可。

例 6-3　简支梁抗弯刚度为 EI，受力如图 6-6a 所示，试用叠加法求截面 A 的转角。

解： 如图 6-6b 所示，在分布载荷 q 单独作用下，截面 A 转角由表 6-1 查得

$$(\theta_A)_q=-\frac{ql^3}{24EI}$$

在集中力偶 M_0 单独作用下，截面 A 转角为

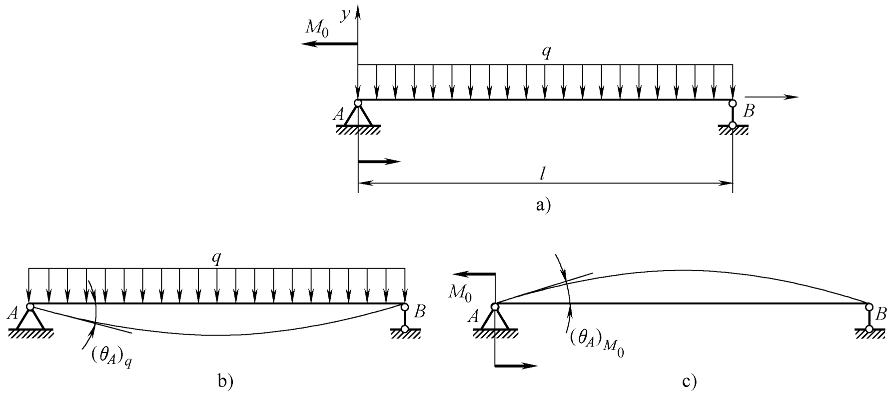


图 6-6

$$(\theta_A)_{M_0}=\frac{M_0 l}{3EI}$$

叠加以上结果，即得到在 q 和 M_0 共同作用下截面 A 的转角

$$\theta_A=(\theta_A)_q+(\theta_A)_M=-\left(\frac{ql^3}{24EI}+\frac{M_0 l}{3EI}\right)$$

例 6-4 如图 6-7a 所示，外伸梁受到均布载荷、集中力和力偶作用。梁的抗弯刚度为 EI，求中点 C 的挠度 v_C。

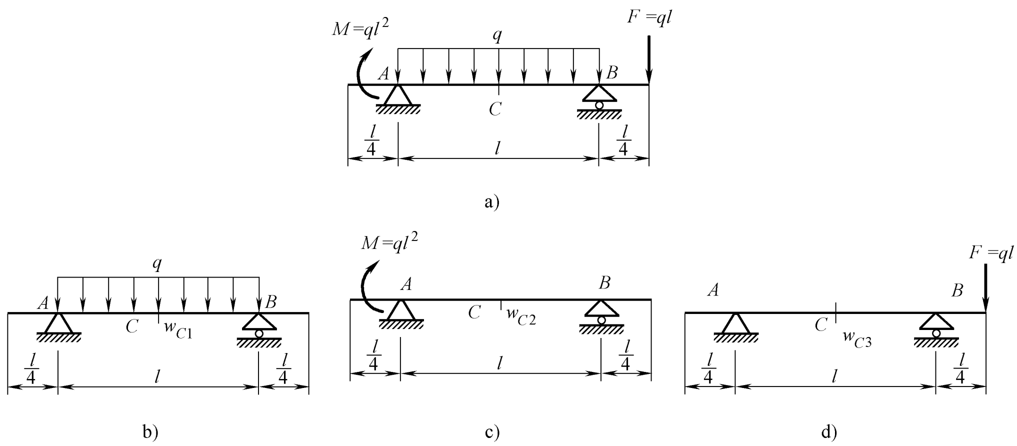


图 6-7

解：原梁可分解为图 6-7b、c、d 所示三根外伸梁受到单一载荷作用的叠加。下面分别计算各梁在中点 C 处的挠度。

图 6-7b 所示梁在中点的挠度就是求相当的简支梁受均布载荷的情况，由表 6-1 可查得

$$v_{C1}=-\frac{5ql^4}{384EI}(\downarrow)$$

图 6-7c 所示外伸梁，无论集中力偶作用在外伸段的什么地方，其在梁中点产生的挠度都是相同的。所以梁在中点的挠度就是简支梁在支座处受集中力偶作用的情况，由表 6-1 可

查得

$$v_{C2}=-\frac{Ml^2}{16EI}=-\frac{ql^4}{16EI}(\downarrow)$$

图 6-7d 所示梁，计算梁中点的挠度时，可将外伸端的集中力等效移动到支座处，而作用在支座处的集中力不会引起梁的变形，所以图 6-7d 所示梁在中点的挠度就是简支梁在支座处受集中力偶作用的情况（见图 6-8），由表 6-1 可查得

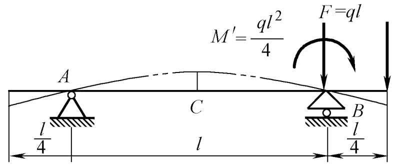


图　6-8

$$v_{C3}=\frac{M'l^2}{16EI}=\frac{ql^4}{64EI}(\uparrow)$$

由叠加法，原梁在中点的挠度为

$$v_C=v_{C1}+v_{C2}+v_{C3}=-\frac{5ql^4}{384EI}-\frac{ql^4}{16EI}+\frac{ql^4}{64EI}=-\frac{23ql^4}{384EI}(\downarrow)$$

2. 逐段刚化法

当无法采用直接叠加法时，将梁分解为 n 段子梁，各段子梁之间刚性连接。然后根据已知单项载荷作用的挠度和转角公式，分 n 次计算各子梁的变形，其中每次只有一段子梁为弹性可以变形，其他段均保持为刚体状态，然后进行叠加。

例 6-5　求图 6-9a 所示悬臂梁自由端的挠度和转角，梁的抗弯刚度为 EI。

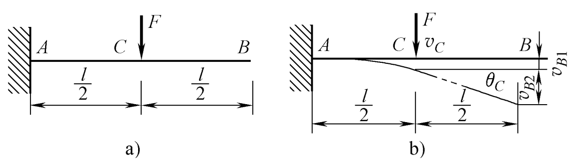


图　6-9

解：很明显 CB 段梁中没有内力，因此该段梁没有变形，但是 AC 段梁的变形将引起 CB 段梁产生挠度和转角。

如图 6-9b 所示，所考察点 B 点的挠度和转角是由于 AC 段梁的变形所引起的，B 点的挠度由 AC 段梁的两种变形因素引起，即 C 点的挠度引起的 B 点的挠度为 v_{B1}，C 截面的转角引起的 B 点的挠度为 v_{B2}，所以有

$$v_{B1}=v_C=\frac{F(l/2)^3}{3EI}=\frac{Fl^3}{24EI}(\text{向下})$$

$$v_{B2}=\frac{l}{2}\cdot\tan\theta_C\approx\frac{l}{2}\theta_C=\frac{l}{2}\cdot\frac{F(l/2)^2}{2EI}=\frac{Fl^3}{16EI}(\downarrow)$$

$$v_B=v_{B1}+v_{B2}=\frac{Fl^3}{24EI}+\frac{Fl^3}{16EI}=\frac{Fl^3}{48EI}(\downarrow)$$

由于 CB 段梁始终保持为直线，所以 C 截面的转角就等于 B 截面的转角，所以有

$$\theta_B=\theta_C=\frac{F(l/2)^2}{2EI}=\frac{5Fl^2}{48EI}(\circlearrowright)$$

例 6-6 如图 6-10a 所示，变截面外伸梁在自由端受集中力 F 作用，已知抗弯刚度 EI 为常数。设已知悬臂梁受到集中载荷和集中力偶作用下的挠度和转角。试求自由端 C 的挠度和转角。

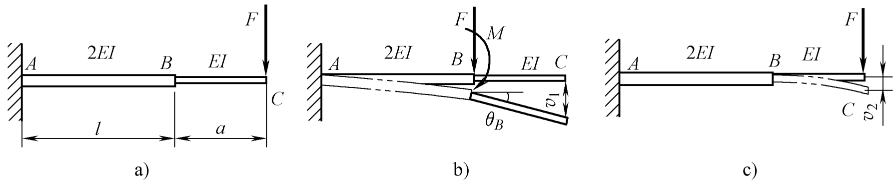


图 6-10

解： 如图 6-10b、c 所示，可将该梁看作是由悬臂梁 AB 与固定在横截面 B 的悬臂梁 BC 叠加而成。先计算悬臂梁 AB 的变形，此时悬臂梁 BC 视为刚体。为了与截面 B 的实际内力相等效，可将集中力 F 平移至截面 B，形成附加力偶 $M=F\cdot a$。再计算悬臂梁 BC 的变形，此时悬臂梁 AB 视为刚体。两种情况均在截面 C 引起挠度。但应注意悬臂梁 AB 的变形既有截面 B 的挠度也有截面 B 的转角，它们都引起截面 C 的挠度。而此悬臂梁 AB 和 BC 两部分挠度的代数和，即为该截面的总挠度 $v_C=v_1+v_2$。

在载荷 F 和力偶 M 作用下，悬臂梁 AB 段截面 B 的转角与截面 C 的转角相同为

$$\theta_{C1}=(\theta_B)_F+(\theta_B)_M=\left(\frac{Fl^2}{4EI}+\frac{Fal}{2EI}\right)(\circlearrowright)$$

悬臂梁 AB 段引起截面 C 的挠度为

$$v_1=(v_B)_F+(\theta_B a)_F+(v_B)_M+(\theta_B a)_M=\left(\frac{Fl^3}{6EI}+\frac{Fl^2a}{4EI}+\frac{Fal^2}{4EI}+\frac{Fala}{2EI}\right)$$

$$=\frac{Fl^3}{6EI}+\frac{Fl^2a}{2EI}+\frac{Fla^2}{2EI}(\downarrow)$$

如图 6-10c 所示，在载荷 F 作用下，悬臂梁 BC 段端面转角为

$$\theta_{C2}=\frac{Fa^2}{2EI}(\circlearrowright)$$

在载荷 F 作用下，悬臂梁 BC 段的端点挠度为

$$v_2=\frac{Fa^3}{3EI}(\downarrow)$$

由此可见，截面 C 的总转角为

$$\theta_{C2}=\theta_{C1}+\theta_{C2}=\frac{Fl^2}{4EI}+\frac{Fal}{2EI}+\frac{Fa^2}{2EI}(\circlearrowright)$$

总挠度为

$$v_C=v_1+v_2=\frac{Fl^3}{6EI}+\frac{Fl^2a}{2EI}+\frac{Fla^2}{2EI}+\frac{Fa^3}{3EI}(\downarrow)$$

3. 等效积分法

当梁作用有分布载荷 $q=q(x)$，而仅已知梁受到集中力作用下的挠度和转角公式，就可以采用定积分的概念，即先确定微分段分布载荷的变形结果，再通过定积分求解得到分布

载荷累积作用的总变形。

例 6-7　如图 6-11a 所示，悬臂梁 ACB 在 CB 段作用有均布载荷，载荷集度为 q，抗弯刚度 EI 为常数。设已经给出悬臂梁受到集中力作用下（见图 6-11b）自由端 B 的挠度为$v_B=-\dfrac{Fc^2(3l-c)}{6EI}$。试求该梁自由端 B 的挠度。

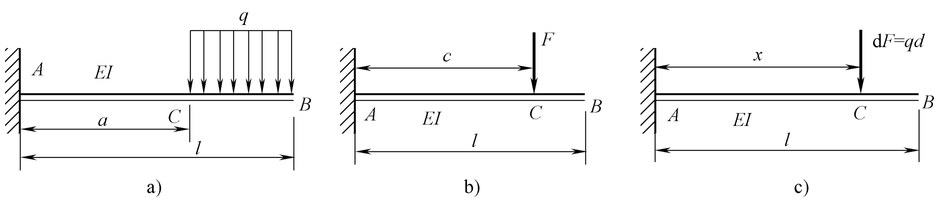


图　6-11

解：如图 6-11c 所示，在距 A 端 x 处取微分段 dx，可认为在 dx 上载荷是均布的，其合力的大小 d$F=q$dx，这相当于在简支梁上有一个集中力 dF 作用。对比已知公式，以 x 取代 c 可得在力 dF 作用下截面 B 的挠度为

$$\mathrm{d}v_B=\frac{x^2(3l-x)q\mathrm{d}x}{6EI}(\downarrow)$$

对上式积分即可得梁截面 B 处的挠度

$$v_B=\int_a^l \mathrm{d}v_B=\frac{q}{6EI}\int_a^l x^2(3l-x)\mathrm{d}x=\frac{q(3l^4-4a^3l+a^4)}{24EI}(\downarrow)$$

叠加法不仅可以用来计算梁的位移，也可以用来计算梁的约束力、内力和应力；它不仅可用于梁，也可用于拉（压）杆、轴和其他结构。只要在分析中材料处于小变形下的线弹性状态，则可应用叠加法计算各类力学响应。

4. 利用对称进行叠加

例 6-8　求图 6-12a 所示阶梯状简支梁中点的挠度和支座处的转角。中间段梁的抗弯刚度为 $2EI$，两边段梁的抗弯刚度为 EI。

解：根据对称性，只考虑右半部分梁，原梁可简化为图 6-12c 所示的梁，而图 6-12c 所示的梁又等价于图 6-12d 所示的悬臂梁（满足转角为零的约束条件），图中 B 点向上的挠度也就是原梁中点 A 向下的挠度。即

$$v_A=v_B$$

采用逐段刚化法求解，先刚化 AC 段梁（图 6-12e），则

$$v_{B1}=\frac{(F/2)a^3}{3EI}=\frac{Fa^3}{6EI}(\uparrow)$$

再刚化 CB 段梁（图 6-12f），AC 段梁的受力情况是在 C 点受集中力 $F/2$ 及集中力偶 $Fa/2$ 的作用。则由叠加法，有

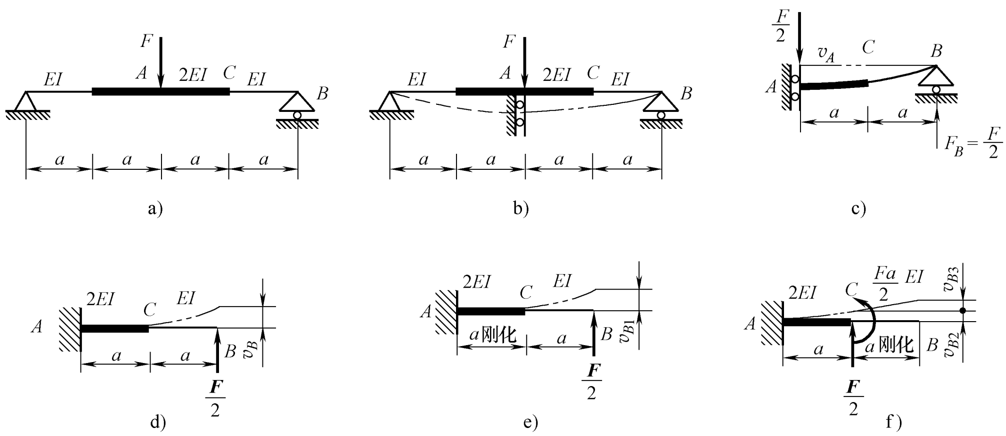


图 6-12

$$v_{B2}=v'_C+v''_C=\frac{(F/2)a^3}{3(2EI)}+\frac{(Fa/2)a^2}{2(2EI)}=\frac{5Fa^3}{24EI}(\uparrow)$$

其中 v'_C、v''_C 分别是集中力 $F/2$ 及集中力偶 $Fa/2$ 在 C 点产生的挠度。

$$v_{B3}=(\theta'_C+\theta''_C)a=\left[\frac{(F/2)a^2}{2(2EI)}+\frac{(Fa/2)a}{2EI}\right]a=\frac{5Fa^3}{12EI}(\uparrow)$$

其中 θ'_C、θ''_C 分别是集中力 $F/2$ 及集中力偶 $Fa/2$ 在 C 点产生的转角。

由于 B 点产生的挠度与原梁中点的挠度大小相等，方向相反，所以，由叠加法原梁中点的挠度为

$$v_A=v_B=v_{B1}+v_{B2}+v_{B3}=\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{24}+\frac{5}{12}\right)\frac{Fa^3}{EI}=\frac{19Fa^3}{24EI}(\downarrow)$$

此亦即梁中的最大挠度。如果梁是抗弯刚度为 EI 的等截面梁，由表 6-1，其中点的挠度也即梁中的最大挠度为

$$v'_{\max}=\frac{F(4a)^3}{48EI}=\frac{4Fa^3}{3EI}$$

因此，$\dfrac{v_{\max}}{v'_{\max}}=\dfrac{v_A}{v'_{\max}}=\dfrac{19}{24}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{19}{32}=0.595$

可见，采用图 6-12a 所示阶梯状形式的梁可以将梁中的最大挠度降低约 40%。

6.5 简单超静定梁

超静定梁：约束反力数目多于静力平衡方程数目的梁称为超静定梁。两者数目的差称为超静定次数。

基本静定基：指将超静定梁上的多余约束除去后所得到的“静定基本系统”。

相当系统：在基本静定基上加上外载荷以及多余约束力，便得到受力和变形与超静定梁完全相同的相当系统。将相当系统与超静定梁相比较，在多余约束处，找到变形协调条件，

进而得到求解超静定问题所需的补充方程。通过静力平衡方程和补充方程可联立求解超静定问题。例如图 6-13a 中，车削工件的左端由卡盘夹紧，右端由尾顶针顶住，计算简图如图 6-13b 所示。此为一次超静定问题。图 6-13c 所示为静定基。图 6-13d 所示为相当系统，支座反力由 F_B 表示，静力平衡方程为

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0, F - F_{Ay} - F_B = 0$$

$$\sum M_A = 0, Fa - F_B l - M_A = 0$$

在多余约束 B 处建立变形协调条件

$$v_B = (v_B)_F + (v_B)_{F_B} = 0$$

利用表 6-1 可知

$$(v_B)_F = \frac{Fa^2}{6EI}(3l - a)$$

$$(v_B)_{F_B} = -\frac{F_B l^3}{3EI}$$

因此

$$F_B = \frac{F}{2}\left(3\frac{a^2}{l^2} - \frac{a^3}{l^3}\right)$$

利用平衡方程可解得，F_{Ay} 和 M_A，画出其弯矩图如图 6-13g 所示 。

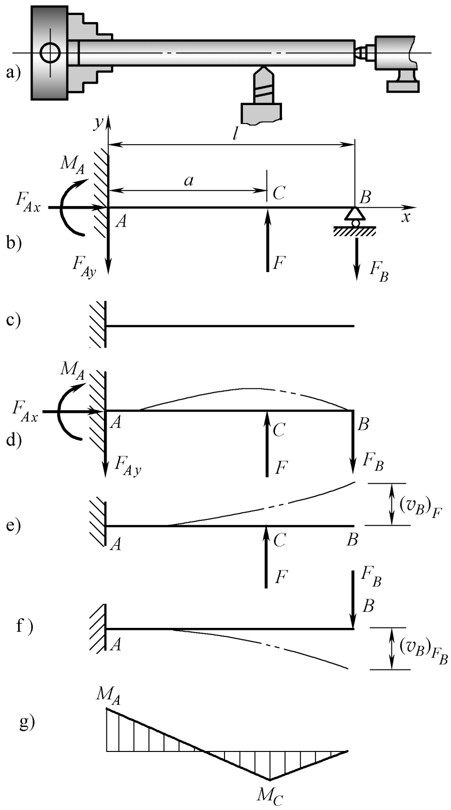


图 6-13　用变形比较法求解简单超静定梁

6.6　梁的刚度条件

梁的设计中，除了需要满足强度条件外，在很多情况下，还要将其弹性变形限制在一定范围内，即满足刚度条件。计算梁的变形的主要目的是为了判别梁的刚度是否足够以及进行梁的设计。工程中梁的刚度主要由梁的最大挠度和最大转角来限定，因此，梁的刚度条件可写为

$$|v|_{\max} \leqslant [v] \tag{6-3}$$

$$|\theta|_{\max} \leqslant [\theta] \tag{6-4}$$

式中，$[v]$ 和 $[\theta]$ 分别为梁的许用挠度和许用转角，它们根据工程实际情况，从有关设计手册中确定。工程中 $[\theta]$ 通常以度（°）表示，而许可挠度通常表示为 $[v]=l/m$（l 是梁的跨长，m 是一个大的自然数）。上述两个刚度条件中，挠度的刚度条件是主要的刚度条件，而转角的刚度条件是次要的刚度条件。

梁的刚度条件有下面三个方面的应用。

（1）校核刚度　给定了梁的载荷、约束、材料、长度以及截面的几何尺寸等，还给定了梁的许可挠度和许可转角。计算梁的最大挠度和最大转角，判断其是否满足梁的刚度条件式（6-3）和式（6-4），满足则梁在刚度方面是安全的，不满足则不安全。

很多时候工程中的梁只要求满足挠度刚度条件式（6-3）即可，而梁的最大转角由于很小，一般情况下不需要校核。

（2）计算许可载荷　给定了梁的约束、材料、长度以及截面的几何尺寸等，根据梁的挠度刚度条件式（6-3）可确定梁的载荷的上限值。如果还要求转角刚度条件满足的话，可由式（6-4）确定出梁的另一个载荷的上限值，两个载荷上限值中最小的那个就是梁的许可载荷。

（3）计算许可截面尺寸　给定了梁的载荷、约束、材料以及长度等，根据梁的挠度刚度条件式（6-3）可确定梁的截面尺寸的下限值。如果还要求转角刚度条件满足的话，可由式（6-4）确定出梁的另一个截面尺寸的下限值，两个截面尺寸下限值中最大的那个就是梁的许可截面尺寸。

例 6-9　图 6-14a 所示为一起重机梁，跨长 $l=10\text{m}$，最大起重量 $F=30\text{kN}$。设计要求梁采用工字钢截面，许可挠度 $[v]=l/400$，弹性模量 $E=200\text{GPa}$。试选择工字钢型号。

解：按刚度条件设计截面。不考虑梁的自重影响，当起吊重物在跨中点 C 时（见图 6-14b），C 截面将产生最大弯矩和最大挠度。

$$[v]=\frac{l}{400}=\frac{10}{400}\text{m}=0.025\text{m}=25\text{mm}$$

根据梁的挠度刚度条件式（6-3），有

$$|v|_{\max}=\frac{Fl^3}{48EI_z}$$

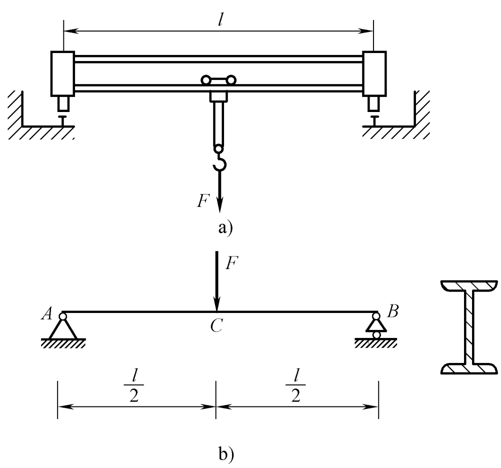


图　6-14

所以

$$I_z=\frac{Fl^3}{48E\ |v|_{\max}}=\frac{30\times10^3\times10^3}{48\times200\times10^9\times25\times10^{-3}}\text{m}^4=1.25\times10^{-4}\text{m}^4=12500\text{cm}^4$$

查型钢表得 36a 工字钢，$I_z=15800\text{cm}^4$ 可以满足刚度要求。

6.7 提高梁刚度的措施

从挠曲线的近似微分方程及其积分可以看出，弯曲变形与弯矩大小、跨度长短、支座条件、梁截面的惯性矩 I、材料的弹性模量 E 有关。故提高梁刚度的措施为：

1. 加强约束

梁的变形通常与梁的跨度的高次方成正比，因此，减小梁的跨度是降低变形的有效途径。工程中常采用调整梁的约束位置或增加约束来减小梁的跨度。例如，简支梁受均布载荷，若将两端的支座均向内移动 0.2L（见图 6-15），则最大弯矩只有原来最大弯矩的五分之一。还可以通过加强梁的约束以减小梁的最大挠度，例如将铰链约束通过焊接工艺改为固定

端约束。

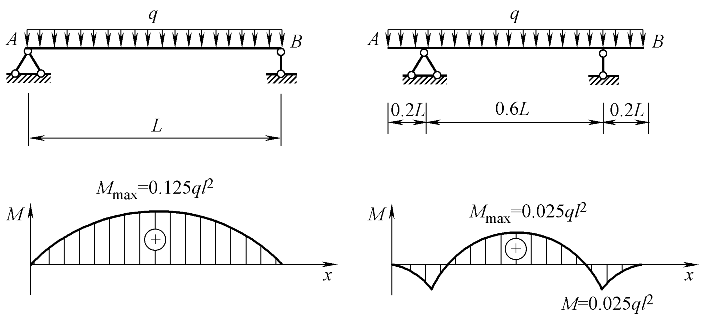


图 6-15　移动约束提高梁的弯曲强度与刚度

2. 合理布置载荷

将一个大集中力通过副梁分散为若干小集中力或者变为分布力将减小最大弯矩的值，如图 6-16 所示。

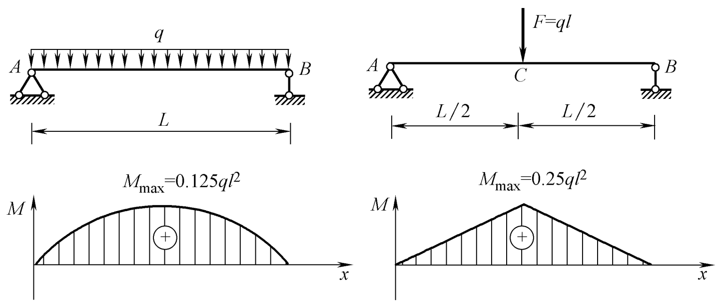


图 6-16　加载方式影响梁的强度与刚度

3. 提高梁的抗弯刚度

选用弹性模量大的材料可提高梁的刚度，但采用此种方法不一定经济。一般地，弹性模量大的材料价格较高。并且各种钢材的弹性模量基本相同，所以为提高梁的刚度而采用高强度钢，效果并不显著。选择合理的截面形状可提高梁的刚度。截面的布置应该尽可能远离中性轴。如采用工字形、槽形、箱形或空心截面等，增加截面对中性轴的惯性矩，既提高梁的强度也增加梁的刚度。但必须指出：小范围内改变梁截面的惯性矩，对全梁的刚度影响很小，因为梁的变形是梁的各段变形累积而成，但此种情况对梁的强度影响很大。

本章小结

1. 本章是在小变形和材料为线弹性的条件下研究梁的变形，并且忽略剪力的影响，平面假设仍然成立。

变形后梁横截面的形心沿垂直梁轴线方向的位移称为挠度 v；横截面变形前后的夹角称为转角 θ。梁的轴线在变形后成为一条连续光滑的曲线，称为挠度曲线 $v(x)$。挠度曲线 v

(x) 的一阶导数即为转角 $\theta(x)=v'(x)$。

2. 根据小挠度微分方程 $EIv''(x)=M(x)$，对 $M(x)$ 积分一次，求得

$$EI\theta(x)=EIv'(x)=\int M(x)\,\mathrm{d}x+C$$

积分两次，求得

$$EIv(x)=\iint M(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}x+Cx+D$$

当两根梁的弯矩图相同，只是说明各相应微分段的变形相同，梁变形后的形状相同；但因两梁的支承条件不同，挠度曲线方程 $v(x)$ 不同，各相应截面的挠度和转角互不相同。因此梁受力后的挠度曲线既与受力（弯矩）有关，也与梁的支承条件有关。

若 $M(x)$ 分为 n 段，则应分 n 段进行积分，出现 $2n$ 个积分常数。积分常数根据边界条件和连续条件确定。

由以上运算可以看出，梁的挠度曲线取决于两个因素：受力（弯矩）和边界条件。

3. 在小变形和弹性范围内，梁的位移与载荷为线性关系，可以用叠加法求梁的位移：将梁的载荷分为若干种简单载荷，分别求出各简单载荷的位移，将它们叠加起来即为原载荷产生的位移。

4. 若梁的未知约束力的数目多于静力平衡方程的数目，则称为超静定梁。两者数目的差值 n 为超静定次数。n 次超静定必须列出 n 个补充方程。根据相当系统的挠曲线和原超静定梁的挠曲线完全相同，可以在解除约束处找到相应的变形条件，利用变形条件建立补充方程，求出多余约束力，进而利用静力平衡方程求出其他约束力和内力。

5. 根据求梁挠曲线的积分计算可以看出，提高梁刚度的主要措施为：减小梁的跨度和弯矩；提高梁的抗弯刚度 EI。

思考题

6-1　已知简支梁的弯曲刚度 EI 为常数，如图 6-17 所示，今欲使梁的挠曲线在 $x=l/3$ 处出现一拐点，则比值 M_{e1}/M_{e2} 应当取何值？

6-2　悬臂梁受两等值力偶作用，如图 6-18 所示，挠曲线（虚线）正确的是______。

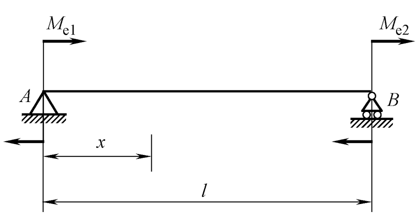


图 6-17　思考题 6-1 图

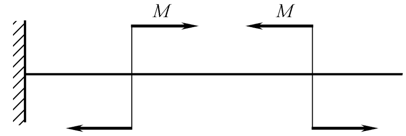


图 6-18　思考题 6-2 图

6-3 一根经过冷作硬化的简支梁，其允许的最大挠度____。

（A）不变；　（B）较大；　（C）较小；　（D）不一定。

6-4　如图 6-19 所示，用积分法求该梁的挠曲线方程时，所需要的边界条件和连续条件各有几个？

6-5　如图 6-20 所示，将坐标系取为 y 轴向下为正，则挠曲线近似微分方程应当取负号吗？

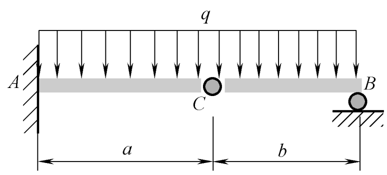


图 6-19　思考题 6-4 图

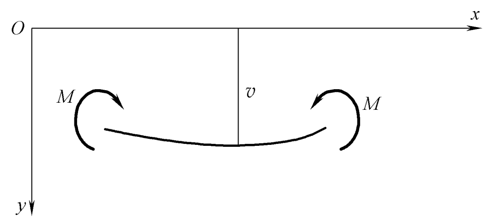


图 6-20　思考题 6-5 图

6-6　求梁的变形时，如果梁内某一段既没有弯矩也没有剪力，此一段梁内有应变吗？有挠度和转角吗？

6-7　超静定梁具有多余约束，这种约束真是“多余”吗？如果工程结构中不用多余约束，结果如何？

6-8　如图 6-21 所示，一端固定的板条截面尺寸为 0.4mm ×6mm，将它弯成半圆形。求力偶矩 M 及最大正应力 $\sigma_{\max}$ 的数值。设 $E=200\text{GPa}$。试问在这种情况下，能否用 $\sigma=M/W$ 计算应力？能否用 $\dfrac{d^2v}{dx^2}=\dfrac{M}{EI}$ 计算变形？

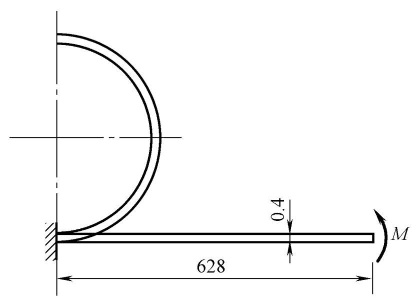


图 6-21　思考题 6-8 图

习　题

6-1　写出图 6-22 所示各梁的边界条件。在图 6-22d 中支座 B 的弹簧刚度系数为 k（N/m）。

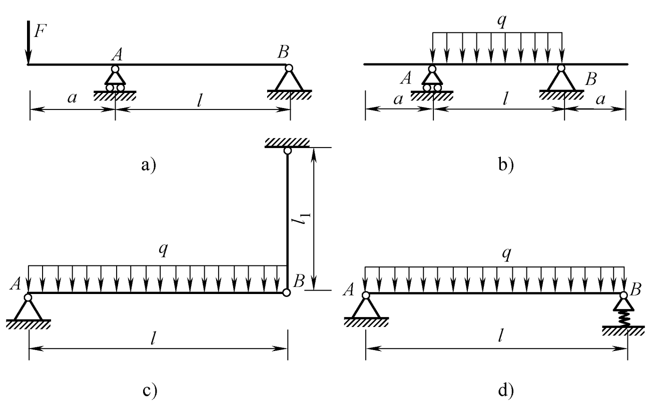


图 6-22　题 6-1 图

6-2　用积分法求图 6-23 所示各梁的挠曲线方程及自由端的挠度和转角。设 EI= 常数。

6-3　用积分法求图 6-24 所示各梁的挠曲线方程、端截面转角 θ_A 和 θ_B、跨度中点的挠度和最大挠度。设 EI= 常量。

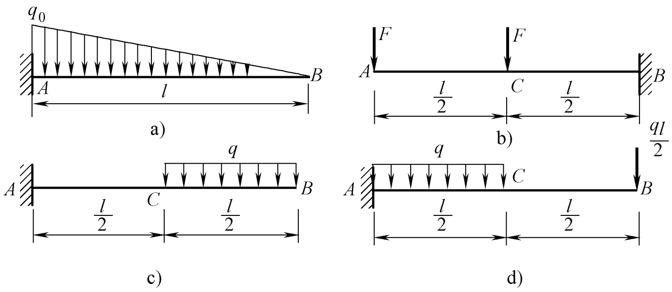


图 6-23　题 6-2 图

6-4　用积分法求梁的最大转角和最大挠度。在图 6-25b 所示的情况下，梁对跨度中点对称，所以可以只考虑梁的二分之一。

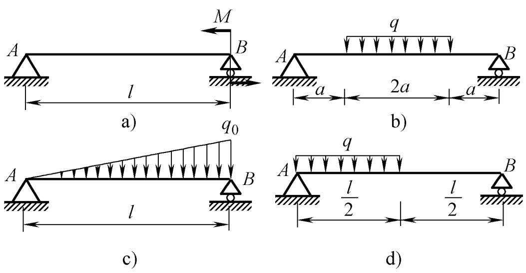


图 6-24　题 6-3 图

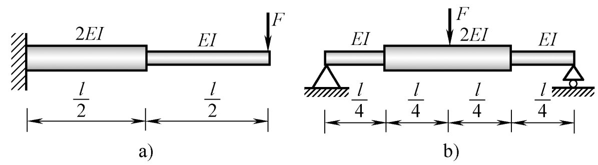


图 6-25　题 6-4 图

6-5　用叠加法求图 6-26 所示各梁截面 A 的挠度和截面 B 的转角。EI 为已知常数。

6-6　磨床砂轮主轴的示意图如图 6-27 所示。轴的外伸段的长度 $a=100\text{mm}$，轴承间距 $l=350\text{mm}$，$E=210\text{GPa}$，$F_y=600\text{N}$，$F_z=200\text{N}$，试求主轴外伸端的总挠度。

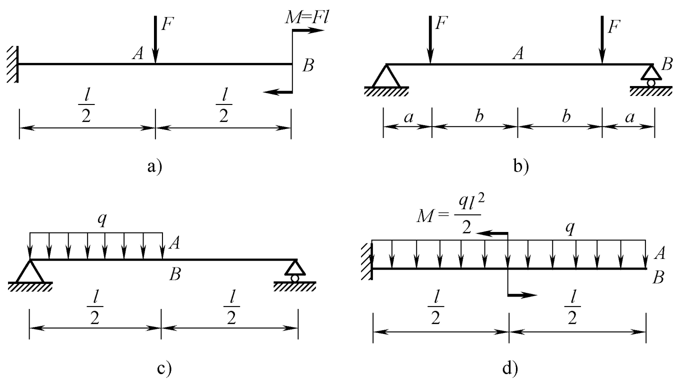


图 6-26　题 6-5 图

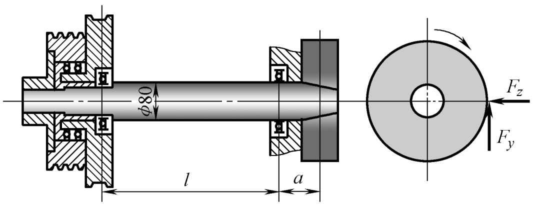


图 6-27　题 6-6 图

6-7　如图 6-28 所示，直角拐 AB 与 AC 轴刚性连接，A 处为一轴承，允许 AC 轴的端截面在轴承内自由转动，但不能上下移动。已知 $F=60\text{N}$，$E=210\text{GPa}$，$G=0.4E$，试求截面 B 的铅垂位移。

6-8　悬臂梁如图 6-29 所示，有载荷 F 沿梁移动。若使载荷移动时总保持相同的高度，试问应将梁轴线预弯成怎样的曲线？设 EI=常数。

6-9　如图 6-30 所示，滚轮沿简支梁移动时，要求滚轮恰好走一水平路径，试问须将梁的轴线预先弯成怎样的曲线？设 EI=常数。

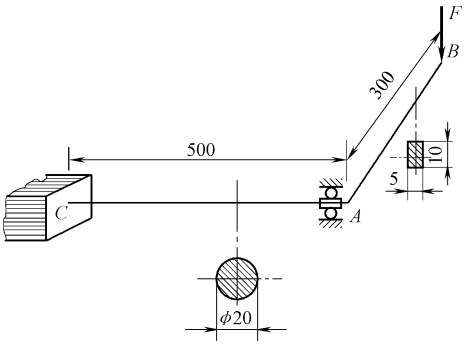


图 6-28　题 6-7 图

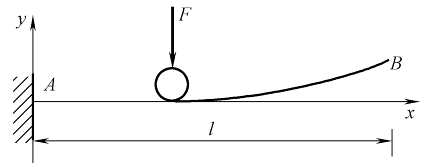


图 6-29　题 6-8 图

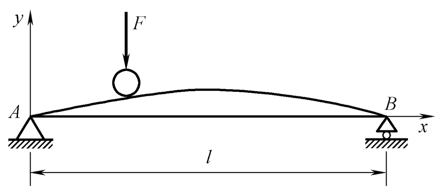


图 6-30　题 6-9 图

第 7 章 应力应变分析与强度理论

内容梗概：一点应力状态是指通过受力构件中一个“材料点”（非数学上的点），在不同方向截面上的正应力和切应力情况。这个点用微元体（通常用微正六面体）来表示。如果微元体各面上的应力已知，可由此求得指定斜截面上的应力。主应力即正应力的极值或切应力为零的微面上作用的正应力。约定三个主应力按代数值排列，即 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$。在平面一般应力状态下一般有两个非零主应力，两个主平面、主切应力。平面一般应力状态的应力分析的图解法即应力圆法，可以用几何方法确定主应力、主平面和主切应力。广义胡克定律给出在线弹性和小变形条件下，复杂应力状态下的应力-应变关系。强度理论是关于在外载荷作用下，材料失效原因与失效规律的假说或学说。工程上对具有复杂应力状态的受力构件一般可以根据静荷，常温条件下材料通常表现为脆性或韧性选用相应的强度理论来建立强度条件。一般地，脆性材料选用第一或第二的强度理论；韧性材料选用第三或第四强度理论。

7.1 一点应力状态概念

1. 一点的应力状态和应力微元体的概念

根据已经学过的拉、压、弯、剪、扭的知识，我们知道在构件内，某一截面上不同位置点处的应力是不同的。如图 7-1a、b 所示，矩形截面梁在纯弯曲时横截面上的正应力分布规律以及圆截面轴扭转时在横截面上的切应力分布规律。这表明点的应力是该点坐标的函数。另一方面，就材料内任一点而言，通过该点沿着不同方位截面上的应力也不同。如图 7-1c 所示，矩形截面杆轴向拉伸时，在斜截面上的正应力和切应力是截面方位角 α 的函数。因此，截面上的应力又随截面方位的不同而变化。

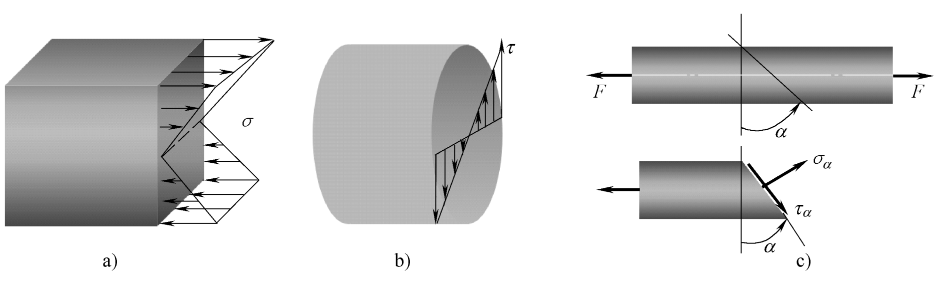


图 7-1 应力是坐标和截面方位的函数

因此，所谓“一点的应力状态”就是指过一点各个方位截面上的“应力情况”。

在材料力学中为了表示一点应力状态，需要采用“应力微元体”方法。一般是围绕该点取出一个三个方向尺寸均为无穷小的正六面体，简称为微元体。由于微元体是无限小的，因此可以认为：

1）微元体各面上应力是均匀分布的，只需要用一剪头表示。如剪头与单元面垂直，则表示正应力。剪头指向单元面为拉应力，剪头背离单元面为压应力。如剪头与单元面平行，则表示切应力。

2）微元体相互平行的面上应力等值、反向。微元体相互垂直的面上切应力服从切应力互等定理。

3）非正六面体也是应力微元体，此时不同的面表示了不同的截面方位。

4）微元体可以任意再切割，切出来的子微元体仍然是应力微元体。

2. 主应力和主平面

在受外力作用的物体内任一点总可以取出一个特殊的微元体，其 3 个相互垂直的面上都无切应力。这种切应力为零的面称为主平面，而主平面上的正应力称为主应力。这样特殊的微元体称为主微元体，主微元体上 3 个主应力按代数值大小排列为 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$，分别称为第一、第二、第三主应力。例如图 7-2 所示的主微元体上，三个主应力分别为 $\sigma_1 = 1\text{MPa}$，$\sigma_2 = 0$，$\sigma_3 = -2\text{MPa}$

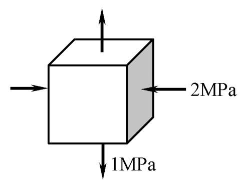


图 7-2　主平面与主应力

3. 应力状态分类

一般而言，应力状态可以分类为简单应力状态和复杂应力状态。简单应力状态就是单向拉、压应力状态。此时，微元体仅在一个方向作用有正应力。复杂应力状态就是微元体几个面上均作用有正应力并且还可能作用有切应力。为了从本质上区分应力状态，按照非零主应力的个数划分为：单向应力状态、二向应力状态和三向应力状态。

1）单向应力状态：在一个微元体上，仅一个主应力不为 0。

2）二向应力状态：在一个微元体上，两个主应力不为 0。

3）三向应力状态：在一个微元体上，三个主应力均不为 0。

请读者观察图 7-3 所示的微元体，该微元体的上、下和左、右面上作用有等值正应力和切应力。另外一个垂直面上应力为零。该微元体所代表的点处于什么应力状态？

有些读者可能选择回答该微元体所代表的点处于二向应力状态。然而，该微元体所代表的点实际上处于单向应力状态。选错的原因是，读者还没有正确计算出该微元体的主应力数值。

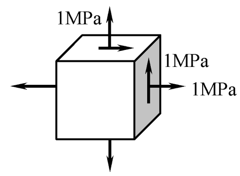


图 7-3　实际为单向应力状态的微元体图

7.2　平面一般应力状态分析——解析法

1. 平面一般应力状态概念

对于空间一般应力状态如图 7-4 所示，一般地三对微面上都有正应力和切应力作用。一般地，应力分量应该有两个下标，其中应力分量下标记法：第一个下标指作用面（以其外法线方向表示），第二个下标指作用方向。

例如，τ_{zx}表示作用面与 z 轴垂直，沿 x 轴方向的切应力。正应力分量由于两个下标相同，在材料力学中简化为一个下标。平面一般应力状态如图 7-5 所示，即在空间应力状态中，令 z 方向的应力分量全部为零（$\sigma_z=\tau_{zx}=\tau_{zy}=0$），而只存在作用于 x-y 平面内的应力分量 σ_x、σ_y、τ_{xy}和 τ_{yx}。并且 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$。

应力正负号规定：正应力以拉应力为正，压应力为负；切应力以对微元体内任意一点取矩为顺时针者为正，反之为负。注意，按照切应力互等定理，在图 7-5 所示的切应力有 $\tau_{yx}>0$，且 $\tau_{xy}=-\tau_{yx}$。

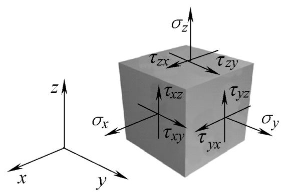


图 7-4　三向应力状态应力分量

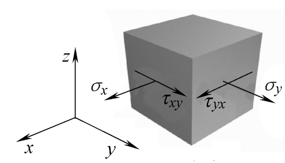
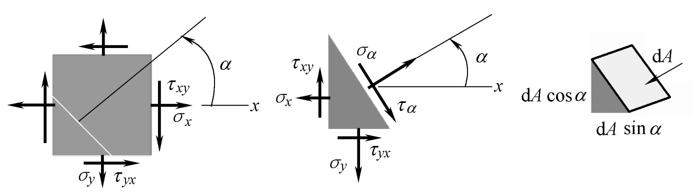


图 7-5　平面应力状态应力分量

2. 平面一般应力状态斜截面上应力

沿着 z 轴方向将微元体投影到 x-y 平面内则形成一个平面矩形（见图 7-6a）。对此平面矩形斜切出一个三角形（单位厚度的三棱柱）单元（见图 7-6b），则斜边代表微元体的斜截面。斜截面的外法线与 x 轴成倾角 α。规定从 x 轴开始逆时针转到斜截面的外法线的倾角 α 为正，反之为负。设斜面面积为 dA，其他面的面积可以通过倾角 α 表示（见图 7-6c）。



a)　　b)　　c)

图 7-6　平面应力状态下微元体及其应力分量

当三棱柱各边作用有应力时，考虑其静力学平衡条件。先以各面面积乘以应力成为力，然后由平面汇交力系的平衡方程：

$$\sum F_{\mathrm{n}}=0,\sigma_\alpha \mathrm{d}A+(\tau_{xy}\mathrm{d}A\cos\alpha)\sin\alpha-(\sigma_x\mathrm{d}A\cos\alpha)\cos\alpha-$$

$$(\tau_{yx}\mathrm{d}A\sin\alpha)\cos\alpha-(\sigma_y\mathrm{d}A\sin\alpha)\sin\alpha=0$$

$$\sum F_{\mathrm{t}}=0,\tau_\alpha \mathrm{d}A-(\tau_{xy}\mathrm{d}A\cos\alpha)\cos\alpha-(\sigma_x\mathrm{d}A\cos\alpha)\sin\alpha+$$

$$(\tau_{yx}\mathrm{d}A\sin\alpha)\sin\alpha-(\sigma_y\mathrm{d}A\sin\alpha)\cos\alpha=0$$

考虑到切应力互等定理，则有 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$。简化后得出斜截面上正应力和切应力表达式分别为

$$\sigma_\alpha=\sigma_x\cos^2\alpha+\sigma_y\sin^2\alpha-\tau_{xy}2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\alpha-\tau_{xy}\sin2\alpha \tag{7-1a}$$

$$\tau_\alpha=(\sigma_x-\sigma_y)\sin\alpha\cos\alpha+\tau_{xy}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\alpha+\tau_{xy}\cos2\alpha \tag{7-1b}$$

3. 正应力极值——主应力

根据式（7-1a），由一元函数求极值条件 $d\sigma_\alpha/d\alpha=0$，得

$$(\sigma_x-\sigma_y)\sin2\alpha+2\tau_{xy}\cos2\alpha=0 \tag{7-2}$$

对比式（7-1b）和式（7-2）可知在正应力取极值的截面上切应力为零，亦即：当正应力取得极值时，此正应力为主应力。由式（7-2）可以得到平面内主方向 α_p 公式：

$$\tan2\alpha_p=-\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} \tag{7-3}$$

α_p表示 σ_α 取极值时的截面方位角。根据正切函数的周期性质，应有 α_p 和 $\alpha_p+90°$两个解。将相应值 $\sin2\alpha_p$、$\cos2\alpha_p$代入式（7-1a）即得

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} \tag{7-4}$$

4. 极大值和极小值正应力作用面

当倾角 α 转到 α_p和 $\alpha_p+90°$面时，对应的两个面作用有极大值正应力 σ_{max}和极小值正应力 σ_{min}。然而，哪个面作用极大值正应力 σ_{max}？哪个面作用极小值正应力 σ_{min}？一个简便方法是：

1）将原微元体面上的切应力等效汇合成两对流出（一个 45°方向）和流入（另一个 45°方向）的切应力汇流。

2）极大值正应力 σ_{max}的作用面偏向于汇流流出方向，极小值正应力 σ_{min}的作用面偏向于汇流流入方向。

例 7-1　一个应力微元体如图 7-7 所示，应力单位 MPa。试求：

（1）倾角 $\alpha=30°$的斜截面的正应力和切应力；

（2）极大值正应力 σ_{max}和极小值正应力 σ_{min}；

（3）画出平面内主应力微元体。

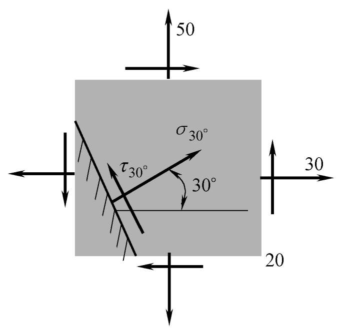


图　7-7

解：（1）由应力微元体图知

$$\sigma_x=30,\sigma_y=50,\tau_{xy}=-20$$

代入斜截面上正应力和切应力表达式（7-1a）和式（7-1b），可得

$$\sigma_{30°}=\left[\frac{30+50}{2}+\frac{30-50}{2}\cos60°-(-20)\sin60°\right]\text{MPa}=52.32\text{MPa}$$

$$\tau_{60°}=\left[\frac{30-50}{2}\sin60°+(-20)\cos60°\right]\text{MPa}=-18.66\text{MPa}$$

（2）代入极值正应力公式（7-4），可得

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\}=\left[\frac{30+50}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{30-50}{2}\right)^2+20^2}\right]\text{MPa}=\begin{matrix}62.4\text{MPa}\\ 17.6\text{MPa}\end{matrix}$$

由平面内主方向公式（7-3），得到主方向为

$$\tan 2\alpha_p=-\frac{2\times(-20)}{30-50}=-2,\quad \left.\begin{matrix}\alpha_p\\ \alpha_p+90^\circ\end{matrix}\right\}=\begin{matrix}-31^\circ43'\\ 58^\circ17'\end{matrix}$$

（3）为画出平面内主应力微元体，先绘制原微元体面的切应力等效汇流流出方向和流入方向，如图 7-8 所示。显然，$\alpha_p+90^\circ=58^\circ17'$偏向于切应力汇流流出方向，它对应于极大值正应力 σ_{max}的作用面。而 $\alpha_p=-31^\circ43'$偏向于切应力汇流流入方向，它对应于极小值正应力 σ_{min}的作用面（注意：极小值正应力 σ_{min}并不一定是压应力。）。由此，绘制平面内主应力微元体如图 7-9 所示。

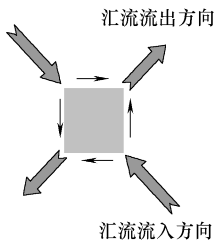


图 7-8

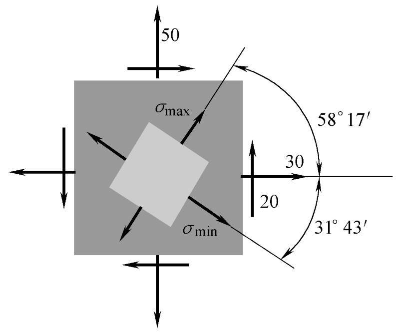


图 7-9

5. 切应力极值——面内最大切应力 τ_{max}和面内最小切应力 τ_{min}

根据式（7-1b），求切应力极值条件 $d\tau_\alpha/d\alpha=0$，得

$$d\tau_\alpha/d\alpha=(\sigma_x-\sigma_y)\cos 2\alpha-2\tau_{xy}\sin 2\alpha=0 \tag{7-5}$$

若 $\alpha=\alpha_s$时，能使 $d\tau_\alpha/d\alpha=0$，则在 α_s所决定的斜截面上，切应力为面内最大或面内最小值。以 α_s代入式（7-5），得

$$(\sigma_x-\sigma_y)\cos 2\alpha-2\tau_{xy}\sin 2\alpha=0 \tag{7-6}$$

$$\tan 2\alpha_s=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}} \tag{7-7}$$

将解出的 α_s代入式（7-1b）得

$$\left.\begin{matrix}\tau_{max}\\ \tau_{min}\end{matrix}\right\}=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} \tag{7-8}$$

6. 最大切应力和最小切应力所在平面与主平面的关系

因为 $\tan 2\alpha_p=-\dfrac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$，$\tan 2\alpha_s=\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}$，

所以有 $$\tan 2\alpha_p\cdot\tan 2\alpha_s=-1$$

由解析几何知识，有 $2\alpha_s=2\alpha_p+\pi/2$，则 $\alpha_s=\alpha_p+\pi/4$。即面内最大切应力和面内最小切应力所在平面与主平面的夹角为 45°。

例 7-2 求图 7-3 所示的微元体上的三个主应力，并确定微元体所处的应力状态。

解：由应力微元体图知

$$\sigma_x=1,\sigma_y=1,\tau_{xy}=1,\sigma_z=0,\tau_{xz}=0,\tau_{yz}=0$$

已经有一个主应力为 0，微元体可以简化为平面应力微元体。代入极值正应力公式（7-4），可得

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\}=\left[\frac{1+1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1-1}{2}\right)^2+1^2}\right]\text{MPa}=(1\pm1)\,\text{MPa}=\begin{matrix}2\text{MPa}\\0\text{MPa}\end{matrix}$$

所以该应力微元体面上有 2 个主应力为 0，因此微元体处于单向应力状态。

例 7-3　求图 7-10 所示的微元体上的三个主应力，并确定微元体所处的应力状态。

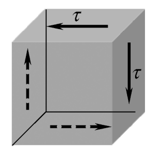


图　7-10

解：由应力微元体图知，微元体上下、左右面上仅有切应力而无正应力，故称为纯剪切应力状态。应力分量为

$$\sigma_x=0,\sigma_y=0,\tau_{xy}=\tau,\sigma_z=0,\tau_{xz}=0,\tau_{yz}=0$$

已经有一个主应力为 0，微元体可以简化为平面应力微元体。代入极值正应力公式（7-4），可得

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\}=\frac{0+0}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{0-0}{2}\right)^2+\tau^2}=\pm\tau$$

所以纯剪切应力状态属于二向应力状态。平面内主方向为

$$\tan2\alpha_p=-\frac{2\tau}{0-0}=-\infty$$

由解析几何知识，$2\alpha_p=-\frac{\pi}{2}$，所以 $\left.\begin{matrix}\alpha_p\\ \alpha_p+90^\circ\end{matrix}\right\}=\begin{matrix}-45^\circ\\+45^\circ\end{matrix}$

如图 7-11 所示，由切应力汇流流入、流出方向，即可知道极大值正应力 $\sigma_{\max}=\tau$ 的作用方向恰指向于切应力汇流流出方向，极小值正应力 $\sigma_{\min}=-\tau$ 的方向恰指向于切应力汇流流入方向。

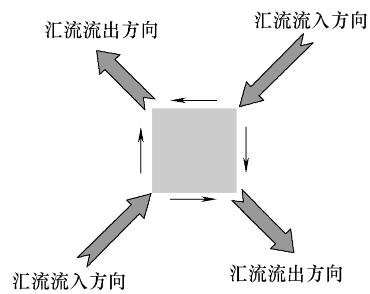


图　7-11

7.3　平面应力状态分析的图解法——应力圆法

1. 应力圆方程

由式（7-1a）和式（7-1b）消去 sin2α、cos2α 得到

$$\left(\sigma_\alpha-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_\alpha^2=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2 \tag{7-9}$$

根据解析几何知识，式（7-9）表示以 σ_α、τ_α 为变量的圆方程。它以 σ_α 为横坐标轴，τ_α 为纵坐标轴，则此圆的圆心 O 坐标为 $\left[\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y),\ 0\right]$，半径为 $R=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+4\tau_{xy}^2\right]^{\frac{1}{2}}$，此圆称应力圆或莫尔圆，如图 7-12 所示。

2. 应力圆的作图法

应力圆法也称应力分析的图解法。已知平面一般应力状态的微元体，画出应力圆的步骤如下：

1）由已知应力 σ_x、σ_y、τ_{xy}值选取适当比例尺，画出（σ，τ）坐标轴；

2）根据图 7-13 中微元体的 A、B 面上已知正应力和切应力数值，可以在 σ-τ 坐标平面上作 a（σ_x，τ_{xy}）和 b（σ_y，τ_{yx}）两点；

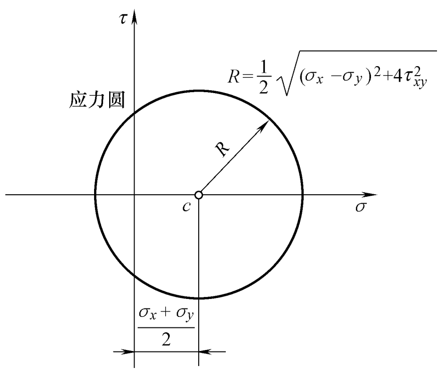


图 7-12　应力圆

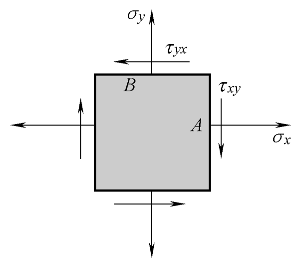


图 7-13　微元体与应力圆面一点对应

3）过 a、b 两点作直线交 σ 轴于 c 点，以 c 为圆心，$\overline{ca}$为半径作应力圆，如图 7-14 所示。

3. 微元体面上应力值与应力圆上点的坐标的对应关系

1）点面对应：应力微元体的任意截面都在应力圆上对应一点；

2）转向相同：应力微元体的任意截面相对于原始截面转动的方向与在应力圆上从原始点开始绕圆心转动到对应点的转向相同；

3）角度加倍：应力微元体的任意截面相对于基准截面转动 α 角，则在应力圆上，从基准点开始，按照相同转向，绕圆心转动的圆心角为 2α。

已知平面一般应力状态的微元体如图 7-13 所示，画出应力圆如图 7-14 所示，则相对于原始 A 截面的 D 点沿圆周转动 2α 角到达某斜截面对应的 E 点，该斜截面的应力在应力圆上满足关系：$\overline{OF}=\sigma_\alpha$ 和$\overline{EF}=\tau_\alpha$

证明：根据点面对应关系，有

$$\overline{OC}=\overline{OB}+\frac{1}{2}(\overline{OA}-\overline{OB})=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB})=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$$

$$\overline{CA}=\frac{1}{2}(\overline{OA}-\overline{OB})=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}$$

因为
$$\overline{CE}=\overline{CD}=\sqrt{\overline{CA}^2+\overline{AD}^2}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}{}^2}$$

所以
$$\begin{aligned}\overline{OF}&=\overline{OC}+\overline{CE}\cos(2\alpha_0+2\alpha)\\&=\overline{OC}+\overline{CE}(\cos2\alpha_0\cos2\alpha-\sin2\alpha_0\sin2\alpha)\end{aligned}$$

$$=\overline{OC}+(\overline{CD}\cos 2\alpha_0)\cos 2\alpha-(\overline{CD}\sin 2\alpha_0)\sin 2\alpha$$
$$=\overline{OC}+\overline{CA}\cos 2\alpha-\overline{AD}\sin 2\alpha$$
$$=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_{xy}\sin 2\alpha$$

所以
$$\overline{FE}=\overline{CE}\sin(2\alpha_0+2\alpha)=\overline{CD}(\sin 2\alpha_0\cos 2\alpha+\cos 2\alpha_0\sin 2\alpha)$$
$$=\overline{AD}\cos 2\alpha+\overline{CA}\sin 2\alpha=\tau_{xy}\cos 2\alpha+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha$$

因此，可知$\overline{OF}=\sigma_\alpha$ 和$\overline{EF}=\tau_\alpha$。

已知平面一般应力状态的微元体如图 7-14 所示，画出的应力圆如图 7-14 所示，平面内的最大和最小应力（即主应力）满足关系：$\overline{OA_1}=\sigma_{\max}=\sigma_1$ 和$\overline{OB_1}=\sigma_{\min}=\sigma_2$。

证明：
$$\overline{OA_1}=\overline{OC}+\overline{CA_1}=\overline{OC}+\overline{CD}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}{}^2}$$
$$\overline{OB_1}=\overline{OC}-\overline{CA_1}=\overline{OC}-\overline{CD}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}{}^2}$$

因此，可知$\overline{OA_1}=\sigma_{\max}=\sigma_1$ 和$\overline{OB_1}=\sigma_{\min}=\sigma_2$。

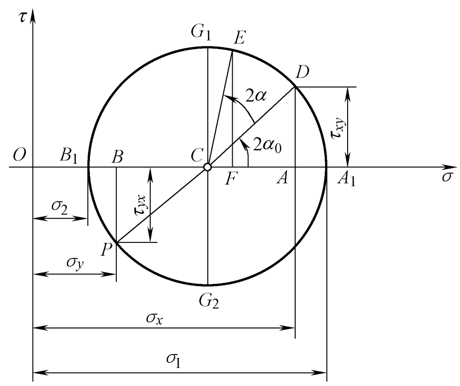


图 7-14　应力圆上的应力分量与主应力

已知平面一般应力状态的微元体如图 7-13 所示，画出的应力圆如图 7-14 所示，平面内的最大和最小切应力满足关系：$\overline{CG_1}=\tau_{\max}$ 和$\overline{CG_2}=\tau_{\min}$。

证明： $\tan 2\alpha_0=-\frac{\overline{AD}}{\overline{CA}}=-\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$

$$\overline{CG_1}=\overline{CD}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}{}^2}$$
$$\overline{CG_2}=-\overline{CD}=-\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}{}^2}$$

因此，$\overline{CG_1}=\tau_{\max}$和$\overline{CG_2}=\tau_{\min}$。还可以利用主应力表示为$\left.\begin{matrix}\tau_{\max}\\ \tau_{\min}\end{matrix}\right\}=\pm\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$。

4. 几种特殊应力状态的应力圆

1）单向等值拉伸：平面应力微元体在左右（或上下）面作用有大小相等的单向拉应力，由于仅有一个主应力不为 0 且大于 0，此时应力圆位置为圆的左侧与 τ 轴相切，如图 7-15所示。

2）二向等值拉伸：平面应力微元体的任意两个互相垂直面作用有大小相等的拉应力，由于 $\sigma_x=\sigma_y$，$\tau_{xy}=0$，此时应力圆半径 $R=0$。故在应力圆上对应于在 σ 轴右侧的一点，如图

7-16 所示。

3）纯剪切：平面应力微元体在两个互相垂直面上，正应力为 0，仅作用有大小相等的切应力。由于在例 7-3 中已经算出 $\sigma_{max}=+\tau$ 和 $\sigma_{min}=-\tau$，此时应力圆为一个同心圆，如图 7-17所示。

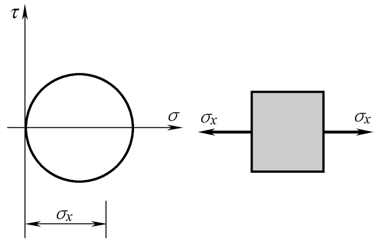


图 7-15　单向拉伸应力圆

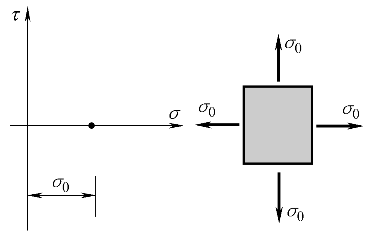


图 7-16　双向等值拉伸应力圆

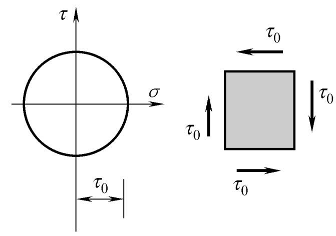


图 7-17　纯剪切应力圆

7.4 平面应力条件下的应变分析*

1. 概述

1）平面应力条件下的应变状态：考虑受力构件自由表面一点处的应力单元，垂直于构件表面的应力为零，故该应力单元处于平面应力状态，应注意沿此方向的应变并不一定为零。但是一般关心面内的应变情况，故选择应变量为 ε_x、ε_y、γ_{xy}。

2）测试原理：在受力构件的表面，当主应变方向不确定时，通常用应变仪测出受力构件表面一点处三个方向的线应变值，然后确定该点处的最大线应变和最小应变及其方程。

2. 平面应变状态分析公式推导

1）选定坐标系为 Oxy，如图 7-18 所示。

2）设在 O 点处，ε_x、ε_y、γ_{xy} 为已知。规定线应变 ε_x、ε_y 伸长为正，而切应变 γ_{xy} 以直角 xOy 增大为正。

3）采用叠加法：求沿任意方向 α（α 规定逆时针方向为正）的线应变 ε_α 和切应变 γ_α（即直角 $x'Oy'$ 的改变量）。

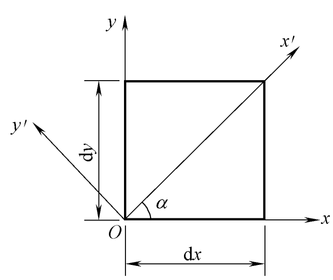


图 7-18　直角坐标系旋转

① 分别考虑由于 ε_x、ε_y、γ_{xy} 而引起 ds 的长度改变 d（Δl）（见图 7-19a、b、c）叠加后得

$$\mathrm{d}(\Delta l)=\varepsilon_x \mathrm{d}x\cos\alpha+\varepsilon_y \mathrm{d}y\sin\alpha-\gamma_{xy}\mathrm{d}x\sin\alpha \qquad \text{(a)}$$

则 x'方向（即 α 方向）的线应变 ε_α 为

$$\varepsilon_\alpha=\frac{\mathrm{d}(\Delta l)}{\mathrm{d}s}=\varepsilon_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\cos\alpha+\varepsilon_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\sin\alpha-\gamma_{xy}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\sin\alpha \qquad \text{(b)}$$

注意到：$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\cos\alpha$ 和$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\sin\alpha$，可得

$$\begin{aligned}\varepsilon_\alpha&=\varepsilon_x\cos^2\alpha+\varepsilon_y\sin^2\alpha-\gamma_{xy}\sin\alpha\cos\alpha\\&=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos2\alpha-\frac{\gamma_{xy}}{2}\sin2\alpha\end{aligned} \qquad \text{(7-10a)}$$

② 再求 $x'Oy'$ 的切应变 γ_α 即直角 $x'Oy'$ 的改变量，分别考虑由于 ε_x、ε_y、γ_{xy} 而引起 Ox' 和 Oy' 坐标轴的偏转角度（见图 7-20a、b、c），然后叠加。

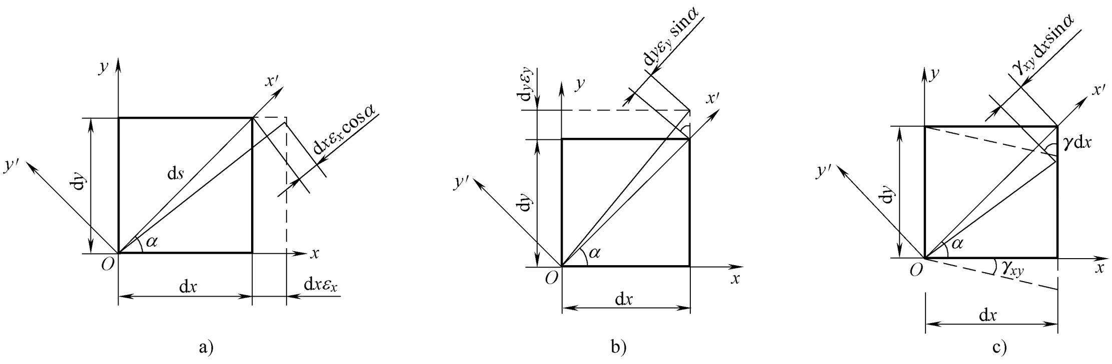


图 7-19　应变分量变化导致斜边长度改变

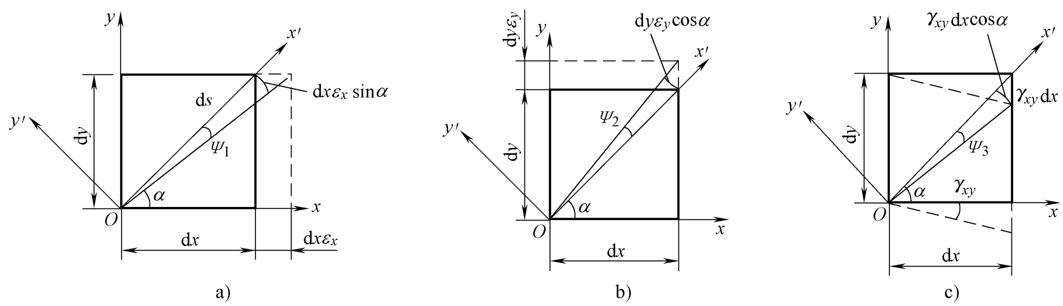


图 7-20　应变分量变化导致斜边角度改变

先求 Ox' 坐标轴偏转角度：

$$\psi_1=\frac{\varepsilon_x \mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\sin\alpha=\varepsilon_x\cos\alpha\sin\alpha \tag{c}$$

$$\psi_2=-\frac{\varepsilon_y \mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\cos\alpha=-\varepsilon_y\sin\alpha\cos\alpha \tag{d}$$

$$\psi_3=\frac{\gamma_{xy} \mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\cos\alpha=\gamma_{xy}\cos^2\alpha \tag{e}$$

则

$$\psi_{Ox'}=\psi_1+\psi_2+\psi_3=(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\sin\alpha\cos\alpha+\gamma_{xy}\cos^2\alpha \tag{f}$$

再求 Oy' 坐标轴偏转角度，以 $\alpha+\pi/2$ 代替式（f）中的 α，得

$$\psi_{Oy'}=-(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\sin\alpha\cos\alpha+\gamma_{xy}\sin^2\alpha$$

故

$$\gamma_\alpha=\psi_{Ox'}-\psi_{Oy'}=2(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\sin\alpha\cos\alpha+\gamma_{xy}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) \tag{7-10b}$$

3. 平面应变状态分析公式讨论

1）已知 ε_x、ε_y、γ_{xy} 可求得任意方向 α 的 ε_α、γ_α。计算公式为

$$\varepsilon_\alpha=\varepsilon_x\cos^2\alpha+\varepsilon_y\sin^2\alpha-\gamma_{xy}\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos2\alpha-\frac{\gamma_{xy}}{2}\sin2\alpha \tag{7-10c}$$

$$\gamma_\alpha=\psi_{Ox'}-\psi_{Oy'}=2(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\sin\alpha\cos\alpha+\gamma_{xy}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) \tag{7-10d}$$

2）已知 ε_x、ε_y、γ_{xy}，可求得平面主应变和主应变方向

采用与求主应力相似的方法，可以得到主应变方向：

$$\tan 2\alpha_0=-\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x-\varepsilon_y} \tag{7-11}$$

平面主应变：

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_{\max}\\ \varepsilon_{\min}\end{matrix}\right\}=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \tag{7-12}$$

4. 平面应变状态的实际测量

1）用解析法求一点处的平面主应变时，首先必须已知 ε_x、ε_y、γ_{xy}，然而用应变仪直接测量时，ε_x、ε_y 可以测试，但 γ_{xy}不易测量。一般是采用三个电阻应变计，先测出任选三个方向 α_1、α_2、α_3 的线应变 ε_{α_1}、$\varepsilon_{\alpha2}$、ε_{α_3}。

2）将 ε_{α_1}、$\varepsilon_{\alpha2}$、ε_{α_3}代入公式（7-10a），得到

$$\varepsilon_{\alpha_i}=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 2\alpha_i-\frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\alpha_i \quad (i=1,2,3) \tag{7-13}$$

联解这三个方程，可以求出 ε_x、ε_y、γ_{xy}。于是再求出主应变的方向与数值。

5. 直角应变花（45°应变花）测量

将三个电阻应变计组集在一个片基上，称为应变花。如果三个应变计方向分别预制成0°、45°和 90°，如图 7-21 所示，则称为直角应变花。由于直角应变花可以很容易地测出 x 轴和 y 轴的线应变，如果再知道另一个 45°方向的线应变，就可以从式（7-13）方程组解出 γ_{xy}，因而，在实际测试中通常采用直角应变花。将测得应变值 $\varepsilon_{0°}$、$\varepsilon_{45°}$、$\varepsilon_{90°}$，代入式（7-13），可求得

$$\varepsilon_x=\varepsilon_{0°},\varepsilon_y=\varepsilon_{45°},\gamma_{xy}=\varepsilon_{0°}+\varepsilon_{90°}-2\varepsilon_{45°}$$

和

$$\tan 2\alpha_0=-\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x-\varepsilon_y}=\frac{2\varepsilon_{45°}-\varepsilon_{0°}-\varepsilon_{90°}}{\varepsilon_{0°}-\varepsilon_{90°}} \tag{7-14}$$

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_{\max}\\ \varepsilon_{\min}\end{matrix}\right\}=\frac{\varepsilon_{0°}+\varepsilon_{90°}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{0°}-\varepsilon_{90°}}{2}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon_{0°}+\varepsilon_{90°}-2\varepsilon_{45°}}{2}\right)^2} \tag{7-15}$$

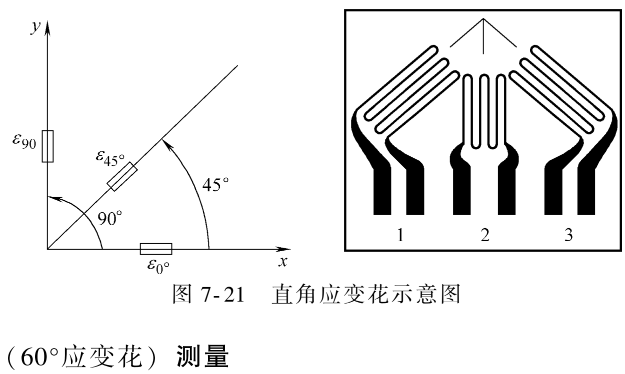


图 7-21　直角应变花示意图

6. 等角应变花（60°应变花）测量

如果三个应变计方向分别预制成 0°、60°和 120°，如图 7-22 所示，则称为等角应变花。

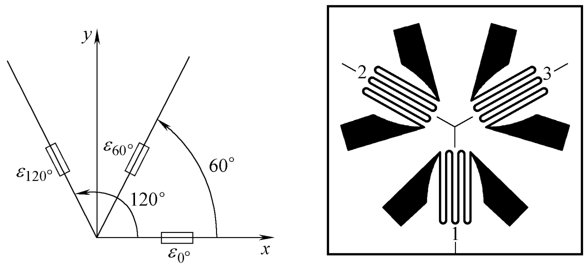


图 7-22 等角应变花示意图

可以根据公式（7-10a），利用测得应变值 $\varepsilon_{0°}$、$\varepsilon_{60°}$、$\varepsilon_{120°}$，求得主应变方向及其平面最大、最小应变：

$$\tan 2\alpha_0=\frac{\sqrt{3}(\varepsilon_{60°}-\varepsilon_{120°})}{2\varepsilon_{0°}-\varepsilon_{60°}-\varepsilon_{120°}} \tag{7-16}$$

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_{\max}\\ \varepsilon_{\min}\end{matrix}\right\}=\frac{\varepsilon_{0°}+\varepsilon_{60°}+\varepsilon_{120°}}{3}\pm\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_{0°}-\varepsilon_{60°})^2+(\varepsilon_{60°}-\varepsilon_{120°})^2+(\varepsilon_{120°})^2} \tag{7-17}$$

例 7-4 用直角应变花测得一点处的三个线应变为 $\varepsilon_{0°}=-300\mu\varepsilon$，$\varepsilon_{45°}=-200\mu\varepsilon$，$\varepsilon_{90°}=200\mu\varepsilon$。

试求该点的主应变及其主方向。

解：（1）求 ε_x、ε_y、γ_{xy}

令 $\alpha_1=0°$，$\alpha_2=45°$，$\alpha_3=90°$，代入公式（7-13），可得方程：

$$\begin{cases}\varepsilon_{0°}=-300\mu\varepsilon=\varepsilon_x\\ \varepsilon_{45°}=-200\mu\varepsilon=\dfrac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}-\dfrac{\gamma_{xy}}{2}\\ \varepsilon_{90°}=200\mu\varepsilon=\varepsilon_y\end{cases}$$

解得 $\varepsilon_x=-300\mu\varepsilon$，$\varepsilon_y=200\mu\varepsilon$，$\gamma_{xy}=300\mu\varepsilon$

（2）求主应变及方向

$$\tan 2\alpha_0=-\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x-\varepsilon_y}=0.6\text{，则 }\alpha_0=15°30'\text{以及 }\alpha_0+90°=105°30'$$

因 $\varepsilon_x<\varepsilon_y$，故最大线应变在105°30′方向上。

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_{\max}\\ \varepsilon_{\min}\end{matrix}\right\}=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}=\begin{cases}242\mu\varepsilon\\ -342\mu\varepsilon\end{cases}$$

7.5 三向应力状态与最大切应力

工程实践中存在不少三向应力状态的问题。例如，在地层的一定深度处的微元体，在地应力作用下便是处于三向应力状态；滚珠轴承中的滚珠与外环接触处、火车轮与轨道接触

处，也是处于三向应力状态的。然而限于研究方法，材料力学仅能研究特殊三向应力状态，但仍属三维受力问题。因此，在研究了平面应力状态后，应当进行三向应力状态进一步的分析，才能符合工程实际强度分析的要求。

本节只讨论三向应力状态特例的一般情形，即：三个主应力 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$ 中至少有一个主应力及其主方向已知。（对于微元体各面上既有正应力，又有切应力的三向应力状态，可以用弹性力学方法求得这三个主应力）如图 7-23 所示微元体，将已知主应力（此处是 σ_z）的作用面作为基准面，将立方微元体投影成平面矩形。平面矩形各边作用的应力相当于平面应力状态，可以按照公式（7-3）和公式（7-4）求主方向和主应力。

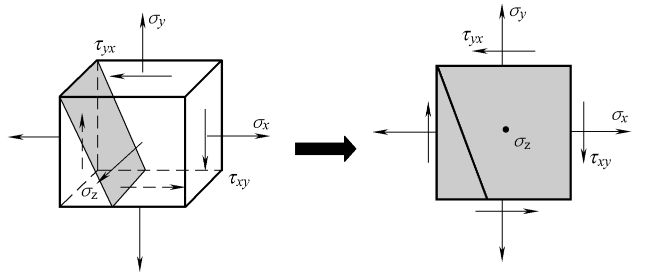


图 7-23　将微元体的已知主平面投影到纸面

当一点的三个主应力确定后，可以计算最大切应力。对于三个主应力已知的三向应力状态，可以将其分解为三种平面应力状态，分别分析平行于三个主应力的三组特殊方向面上的应力情况（图 7-24a、b、c）。在平行于主应力 σ_1 的方向面上，可视为只有 σ_2 和 σ_3 作用的平面应力状态；在平行于主应力 σ_2 的方向面上可视为只有 σ_1 和 σ_3 作用的平面应力状态；在平行于主应力 σ_3 的方向面上，可视为只有 σ_1 和 σ_2 作用的平面应力状态。由此将三种平面应力状态所对应的应力圆绘制在一幅图内，就是三向应力状态应力圆（见图 7-25）。

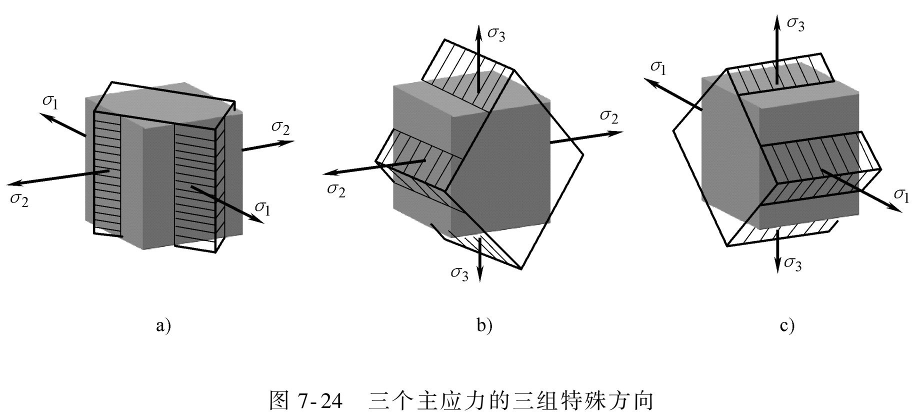


图 7-24　三个主应力的三组特殊方向

用弹性力学方法可以证明，主微元体中任意斜截面上的正应力及切应力，必位于以这三个应力圆为界的阴影区内。由三向应力圆可以看出，在三向应力状态下，代数值最大的正应力是第一主应力，最小的正应力为第三主应力 $\sigma_{max} = \sigma_1$，$\sigma_{min} = \sigma_3$。而最大切应力为最大应力圆的半径（见图 7-25）。这意味着无论材料处于什么应力状态，最大切应力都应当按照三

向应力状态的公式计算，即最大主应力和最小主应力之差的一半，其数值为

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} \tag{7-18}$$

此时 τ_{max} 的作用面与 σ_1 作用面和 σ_3 作用面成夹角±45°（见图 7-26）。

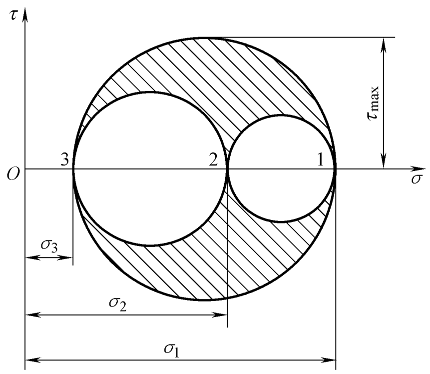


图 7-25　三向应力状态的应力圆

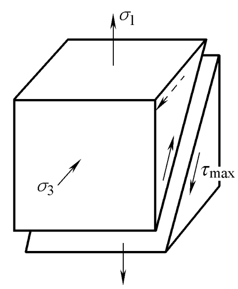


图 7-26　最大切应力及其作用面

7.6　广义胡克定律

1. 拉（压）胡克定律与剪切胡克定律

对于各向同性材料，在线弹性范围内发生小变形时，在单向应力状态（即：单向拉/压）下，应当采用拉（压）胡克定律表示应力-应变关系。设应力沿 x 方向，则有

$$\sigma_x=E\varepsilon_x$$

或

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E}$$

此时，横向变形为

$$\varepsilon_y=\varepsilon_z=-\mu\varepsilon_x=-\mu\frac{\sigma_x}{E}$$

在纯剪切应力条件下，应当采用剪切胡克定律

$$\tau=G\gamma$$

2. 广义胡克定律

当材料处于复杂应力状态下，就不可以直接使用拉（压）胡克定律，而必须采用广义胡克定律。对于各向同性材料，在线弹性范围内发生小变形时，各应变分量可由相关应力分量引起的应变分量叠加得到。可以证明此时正应变与正应力具有相同方向且正应变只与正应力有关，切应变只与切应力有关，线变形与角变形的相互影响可以略去。

在三个主应力 σ_1、σ_2、σ_3 空间下，广义胡克定律可以应用叠加原理得到。如图 7-27 所示，由 σ_1 引起的沿 σ_1 方向的应变为

$$\varepsilon'_1=\frac{\sigma_1}{E}$$

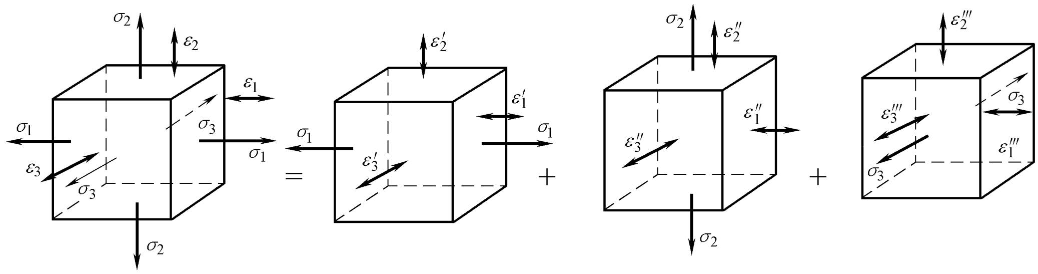


图 7-27　应力叠加示意图

由 σ_2 和 σ_3 引起的沿 σ_1 方向的（横向变形）应变分别为

$$\varepsilon''_1=-\mu\frac{\sigma_2}{E}\text{及 }\varepsilon'''_1=-\mu\frac{\sigma_3}{E}$$

因而，沿主应力 σ_1 作用方向的总应变为

$$\varepsilon_1=\frac{1}{E}[\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)]$$

同理可得，沿主应力 σ_2 和 σ_3 作用方向的总应变分别为

$$\varepsilon_2=\frac{1}{E}[\sigma_2-\mu(\sigma_1+\sigma_3)]$$

$$\varepsilon_3=\frac{1}{E}[\sigma_3-\mu(\sigma_1+\sigma_2)]$$

在空间一般应力状态下，可以看作三组单向应力和三组纯剪切的组合。对于各向同性材料，在小变形、线弹性范围内，线应变只与正应力有关而与切应力无关。切应变只与切应力有关，而与正应力无关。广义胡克定律的形式为

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\frac{1}{E}[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)]\\ \varepsilon_y=\frac{1}{E}[\sigma_y-\mu(\sigma_z+\sigma_x)]\\ \varepsilon_z=\frac{1}{E}[\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)]\end{cases}\quad\text{和}\begin{cases}\gamma_{yz}=\frac{\tau_{yz}}{G}\\ \gamma_{zx}=\frac{\tau_{zx}}{G}\\ \gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}\end{cases}\tag{7-19}$$

在主应力空间，广义胡克定律的形式简化为

$$\begin{cases}\varepsilon_1=\frac{1}{E}[\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)]\\ \varepsilon_2=\frac{1}{E}[\sigma_2-\mu(\sigma_1+\sigma_3)]\\ \varepsilon_3=\frac{1}{E}[\sigma_3-\mu(\sigma_1+\sigma_2)]\end{cases}\quad\text{和}\quad\begin{cases}\gamma_{yz}=0\\ \gamma_{zx}=0\\ \gamma_{xy}=0\end{cases}\tag{7-20}$$

在平面一般应力状态下，由于 $\sigma_z=0$，平面内任意与 x 轴夹角 α 方位上的应变分量：

$$\begin{cases} \varepsilon_{\alpha}=\dfrac{1}{E}[\sigma_{\alpha}-\mu\sigma_{\alpha+90^\circ}] \\ \varepsilon_{\alpha+90^\circ}=\dfrac{1}{E}[\sigma_{\alpha+90^\circ}-\mu\sigma_{\alpha}] \\ \gamma_{\alpha}=\dfrac{\tau_{\alpha}}{G}=\dfrac{2(1+\mu)}{E}\tau_{\alpha} \end{cases} \tag{7-21}$$

讨论：

1）在复杂应力状态下（注意：复杂应力状态并不一定是二向或三向应力状态），一个方向的线应变不仅与该方向的正应力有关，还受到其他两个垂直方向的正应力的影响；

2）同理，在复杂应力状态下，一个方向的正应力不仅与该方向的线应变有关，还与其他两个垂直方向的线应变相关联；

3）应用广义胡克定律公式要考虑应力的符号，按规定拉应力为正，压应力为负；

4）应变 ε 同样要考虑符号规定，正值代表伸长线应变，负值代表缩短线应变；

5）当试件表面的主应力方向不定时，可以采用电测方法。如果用直角应变花测得试件表面一点处的三个应变值 ε_{0°、ε_{45°、ε_{90°，则当材料在线弹性范围内变形时，就可以通过式（7-15）计算出两个面内主应变。应用广义胡克定律公式，解出相应的两个平面主应力：

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\}=\frac{E}{2(1-\mu)}(\varepsilon_{0^\circ}+\varepsilon_{90^\circ})\pm\frac{E}{\sqrt{2}(1+\mu)}\sqrt{(\varepsilon_{0^\circ}-\varepsilon_{45^\circ})^2+(\varepsilon_{45^\circ}-\varepsilon_{90^\circ})^2} \tag{7-22}$$

对于各向同性材料，主应力方向与主应变方向重合，由式（7-11）决定。

如果用等角应变花测得试件表面一点处的三个应变值 ε_{0°、ε_{60°、ε_{120°，则可以类似计算出两个面内主应变。应用广义胡克定律公式，解出相应的两个平面主应力：

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\}=\frac{E}{3}\left[\frac{\varepsilon_{0^\circ}+\varepsilon_{60^\circ}+\varepsilon_{120^\circ}}{1-\mu}\pm\frac{\sqrt{2}}{1+\mu}\sqrt{(\varepsilon_{0^\circ}-\varepsilon_{60^\circ})^2+(\varepsilon_{60^\circ}-\varepsilon_{120^\circ})^2+(\varepsilon_{120^\circ}-\varepsilon_{0^\circ})^2}\right] \tag{7-23}$$

对于各向同性材料，主应力方向与主应变方向重合，由式（7-16）决定。

3. 体积胡克定律

如图 7-28 所示，考虑一个微分立方微元体，在变形前各棱边的长度分别为 dx、dy、dz，其体积为

$$V_0=\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z$$

变形后，沿 σ_1、σ_2、σ_3 方向，各棱边的长度分别为

$$\mathrm{d}x+\varepsilon_1\cdot\mathrm{d}x=(1+\varepsilon_1)\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}y+\varepsilon_2\cdot\mathrm{d}y=(1+\varepsilon_2)\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}z+\varepsilon_3\cdot\mathrm{d}z=(1+\varepsilon_3)\mathrm{d}z$$

该微分立方微元体的体积为

$$V_1=(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

展开后略去含有高阶微量的 $\varepsilon_1\varepsilon_2$、$\varepsilon_2\varepsilon_3$、$\varepsilon_3\varepsilon_1$、$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ 的各项，得

$$V_1=(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

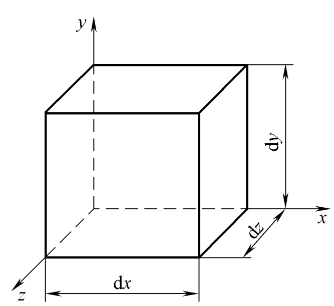


图 7-28　立方微元体

定义体积应变为

$$\theta=\frac{V_1-V_0}{V_0}=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

代入式（7-20）前三项，简化后得

$$\theta=\frac{1-2\mu}{E}\cdot(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$$

改写为

$$\theta=\frac{3(1-2\mu)}{E}\cdot\frac{(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)}{3}=\frac{\sigma_m}{K} \qquad (7\text{-}24)$$

式中，$K=\frac{E}{3(1-2\mu)}$称为体积横量；$\sigma_m=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}=\frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3}$是三个正应力的平均值。

讨论：

1）体积应变 θ 只与三个主应力（或三个正应力）之和有关，而与主应力之间的比例无关。因此，对不同的微元体，只要三个主应力之和相等，则体积应变相等。

2）式（7-24）说明在线弹性范围内，体积应变 θ 与平均应力 σ_m 成正比，此即为体积胡克定律。

例 7-5 如图 7-29 所示，一个边长为 $a=0.1\text{m}$ 的铜立方块，无间隙地放入一个变形可略去不计的刚性凹槽中。已知铜的弹性模量 $E=100\text{GPa}$，泊松比 $\mu=0.34$。当受到 $F=300\text{kN}$ 的均布压力作用时，求该铜块的主应力。

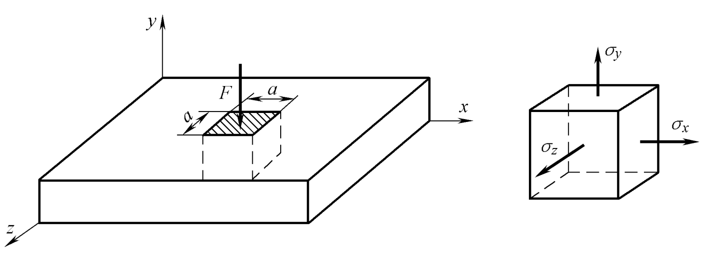


图 7-29

解：由已知条件，可以确定 $\varepsilon_x=0$，$\varepsilon_z=0$，

$$\sigma_y=-\frac{F}{A}=-30\text{MPa}$$

代入式（7-19）得到方程：

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)]=0$$

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}[\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)]=0$$

解得 $\sigma_x=-15.5\text{MPa}$，$\sigma_z=-15.5\text{MPa}$

例 7-6 如图 7-30a 所示，等截面杆受轴向拉伸。材料的弹性模量 E，泊松比 μ。已测

得杆表面上一点沿与轴线成45°方向的线应变 ε_{45°。试确定横截面正应力。

解：设横截面正应力为 σ，则在45°方向的正应力为 $\sigma/2$。为了使用广义胡克定律求出 45°方向的正应力和线应变，必须先画出45°方向的应力微元体。如图 7-30b 所示，在45°方向建立正交坐标系 x'-y'，斜截面上的微元体为各边等值拉应力 $\sigma_{45^\circ}=\sigma/2$ 与切应力 $\tau_{45^\circ}=\sigma/2$。按照广义胡克定律，在45°方向的线应变为

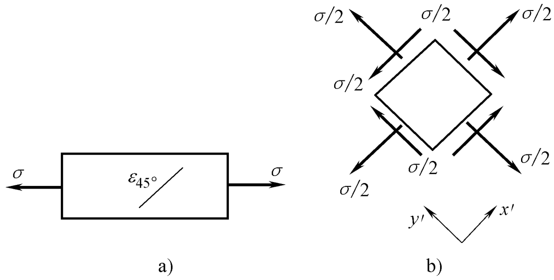


图　7-30

$$\varepsilon_{45^\circ}=\varepsilon_x{}'=\frac{1}{E}[\sigma_x{}'-\mu(\sigma_y{}'+\sigma_z)]$$

$$=\frac{1}{E}\left[\frac{\sigma}{2}-\mu\left(\frac{\sigma}{2}+0\right)\right]=\frac{\sigma}{2E}[1-\mu]$$

则
$$\sigma=\frac{2E\varepsilon_{45^\circ}}{1-\mu}$$

例 7-7　如图 7-31a 所示，等截面圆轴直径 d，两端受力偶 M 作用而发生扭转变形。材料的弹性模量 E，泊松比 μ。已测得圆轴表面上一点沿与轴线成 45　方向的线应变 ε_{45°。试确定作用在圆轴两端的外力偶 M。

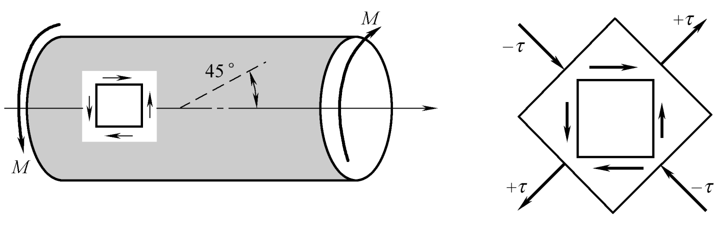


图　7-31

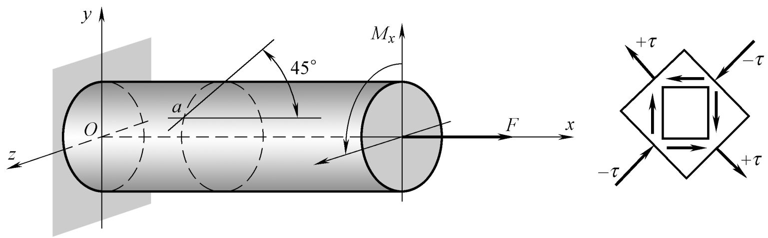
解：扭转力偶 M 引起圆轴表面的微元体处于纯剪切应力状态，切应力 $\tau=M/W_T$，$W_T=\pi d^3/16$。如图 7-30b 所示，可知道极大值正应力 $\sigma_{max}=+\tau$ 的作用方向恰指向于切应力汇流流出方向，极小值正应力 $\sigma_{min}=-\tau$ 的方向恰指向于切应力汇流流入方向。按照广义胡克定律，在 45°方向的线应变为

$$\varepsilon_{45^\circ}=\frac{1}{E}[\tau-\mu(-\tau+0)]=\frac{\tau(1+\mu)}{E}=\frac{M(1+\mu)}{W_TE}$$

所以
$$M=\frac{\varepsilon_{45^\circ}W_TE}{(1+\mu)}=\frac{\pi d^3\varepsilon_{45^\circ}E}{16(1+\mu)}$$

例 7-8　圆截面杆受拉力 F 和扭转力偶 M_x 作用如图 7-32a 所示。杆的直径为 d，材料的

弹性模量为 E，泊松比为 μ。已分别测得圆杆表面上一点 a 处沿 x 轴的线应变 ε_{0° 以及沿与轴线成45°方向的线应变 ε_{45°。试确定拉力 F 和扭转力偶 M_x。



a)　　b)

图　7-32

解：拉力 F 引起的正应力 σ_x 与扭转力偶 M_x 无关。按照广义胡克定律：在 0°对应的线应变为

$$\varepsilon_{0^\circ}=\frac{\sigma}{E}=\frac{F}{A\cdot E},\ F=AE\varepsilon_{0^\circ}$$

拉力 F 在45°斜截面上引起等值拉应力与切应力，有

$$\sigma_{45^\circ}=\tau_{45^\circ}=\frac{\sigma_{0^\circ}}{2}=\frac{\sigma}{2}$$

按照广义胡克定律：在45°斜截面上，拉力 F 单独作用对应的线应变为

$$\varepsilon'_{45^\circ}=\frac{1}{E}\left[\frac{\sigma}{2}-\mu\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right]=\frac{\sigma}{2E}(1-\mu)$$

因为 $\sigma=\dfrac{F}{A}$，所以 $F=\dfrac{2EA\varepsilon'_{45^\circ}}{1-\mu}$

扭转力偶 M_x 引起圆轴表面的微元体处于纯剪切应力状态，切应力 $\tau=M_x/W_T$，$W_T=\pi d^3/16$。

如图 7-32b 所示。按照广义胡克定律，扭转力偶 M_x 引起在45°方向的线应变为

$$\varepsilon''_{45^\circ}=\frac{1}{E}[-\tau-\mu(\tau)]=-\frac{\tau}{E}(1+\mu)=-\frac{M_x}{EW_T}(1+\mu)$$

注意45°方向实际线应变测试值 $\varepsilon_{45^\circ}=\varepsilon'_{45^\circ}+\varepsilon''_{45^\circ}$，一般地可以表示为

$$\varepsilon_{45^\circ}=\frac{\sigma}{2E}(1-\mu)+\frac{-\tau}{E}(1+\mu)$$

故

$$M_x=\frac{-W_T\cdot E\cdot\varepsilon''_{45^\circ}}{(1+\mu)}=\frac{-\pi d^3\cdot E(\varepsilon_{45^\circ}-\varepsilon'_{45^\circ})}{16(1+\mu)}$$

7.7 复杂应力状态的应变比能

应变比能也称为应变能密度，表示弹性体单位体积存储的应变能。

1. 单向拉伸（压缩）应力状态的应变比能

由金属材料单向拉伸试验结果知，在线弹性条件下，正应力与相应的线应变保持线性关系，应变比能数值恰如图 7-33 所示的直角三角形面积，为

$$u=\frac{1}{2}\sigma\varepsilon \tag{7-25}$$

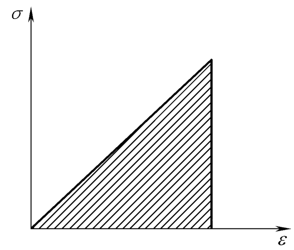


图 7-33　线弹性材料准静态拉伸时的应变比能

2. 三向应力状态的应变比能

在三向应力状态下，弹性体应变能与外力所做功在数值上仍然相等。应变能只决定于外力和变形的最终数值，而与加载的次序无关。可以假定应力按比例同时从零加到最终值，在线弹性情况下，每一主应力与相应的主应变仍保持线性关系，于是三向应力状态下的应变比能通过主应力和主应变表示为

$$u=\frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1+\frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2+\frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3 \tag{7-26a}$$

通过正应力和切应力以及线应变和切应变，应变比能还可以表示为

$$u=\frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x+\frac{1}{2}\sigma_y\varepsilon_y+\frac{1}{2}\sigma_z\varepsilon_z+\frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy}+\frac{1}{2}\tau_{yz}\gamma_{yz}+\frac{1}{2}\tau_{xz}\gamma_{xz} \tag{7-26b}$$

将式（7-26a）中的各主应变代入到广义胡克定律式（7-20），整理得

$$u=\frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\mu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)\right] \tag{7-27}$$

3. 体积改变应变比能、形状改变应变比能

一般的应力状态可以分解为平均应力状态和偏应力状态，而应变能密度可以按照两种应力状态所对应的能量进行叠加，如图 7-34 所示。

$$u=u_V+u_d \tag{7-28}$$

式中，u_V 称为体积改变应变比能；u_d 称为形状改变应变比能。

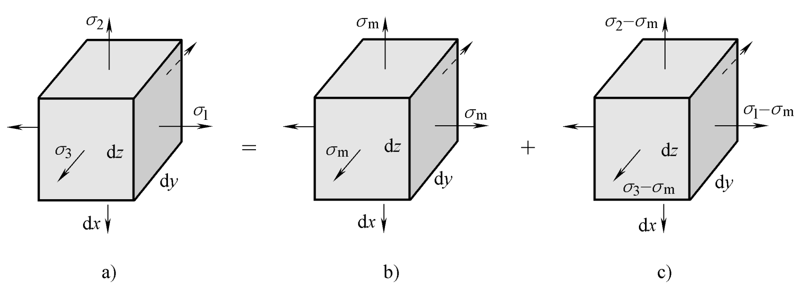


图 7-34　一般应力状态分解为平均应力状态叠加偏应力状态

对于图 7-34b 所表示的平均应力状态，将三个平均应力 σ_m 代入式（7-27），得到体积改变应变比能公式：

$$u_V=\frac{3(1-2\mu)}{2E}\sigma_m^2=\frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2 \tag{7-29}$$

由图 7-34c 所表示的偏应力状态，可综合式（7-26）~式（7-28），得到形状改变应变比

能公式：

$$u_d=\frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2] \tag{7-30}$$

例 7-9 导出各向同性线弹性材料的弹性常数 E、G 和 μ 之间的关系。

解：考虑图 7-35 所示的纯剪切应力状态，三个主应力为 $\sigma_1=\tau$，$\sigma_2=0$，$\sigma_3=-\tau$。代入式（7-26a）并利用剪切胡克定律得

$$u=\frac{\tau^2}{2G}$$

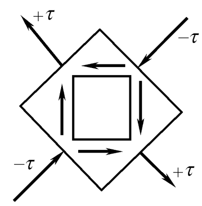


图 7-35

再将纯剪切应力状态的三个主应力为 $\sigma_1=\tau$，$\sigma_2=0$，$\sigma_3=-\tau$ 代入式（7-27）得

$$u=\frac{\tau^2(1+\mu)}{E}$$

两种公式表示的能量相同，令 $$\frac{\tau^2}{2G}=\frac{\tau^2(1+\mu)}{E}$$

可得 $$G=\frac{E}{2(1+\mu)}$$

7.8 强度理论概述

在前面几章中曾讨论了低碳钢与铸铁拉伸与压缩时的破坏现象以及低碳钢与铸铁扭转时的破坏现象。当材料发生断裂时，构件因解体而丧失承载能力；当材料发生屈服时，晶面间相对滑移，构件要产生塑性变形而失去正常的承载功能。这两种现象都称为材料失效，屈服与断裂是材料的两种基本失效模式。在工程实践中，在不同的外载荷作用下，材料发生什么形式的失效？何时发生失效？失效应力是多大？怎样建立失效判据？这些是工程技术人员必须掌握的基础知识。

在简单应力状态下，材料发生哪种失效，将取决于材料本身的力学性能。铸铁是脆性材料，其抗拉能力低于抗剪能力，并均低于抗压能力。试件拉伸时（处于单向应力状态）在横截面处拉断；扭转时（处于纯切应力状态）在与轴线成 45°的螺旋面处拉断；压缩时，在与轴线成 45°的斜面处剪断。这种断裂在其发生之前不产生塑性变形或塑性变形很小，称为脆性断裂。低碳钢是塑性材料，其抗剪能力低于抗拉（压）能力，试件拉伸时先屈服后拉断，扭转时先屈服后剪断。这种断裂在其发生之前产生塑性变形，称为韧性断裂。根据前面学习过的知识，我们知道在拉伸、压缩、弯曲时，材料危险点处于单向应力状态，失效判据可以通过轴向拉伸或压缩试验所获得的极限应力建立。对于脆性材料，当横截面的最大正应力达到强度极限：$\sigma_{max}=\sigma_b$时，材料发生断裂失效。因此，$\sigma_{max}=\sigma_b$就是失效判据，材料强度极限 σ_b就是极限应力。对于塑性材料，当横截面的最大正应力达到屈服极限：$\sigma_{max}=\sigma_s$时，材料发生屈服失效，$\sigma_{max}=\sigma_s$就是失效判据，屈服极限σ_s就是极限应力。而对于塑性材料扭转，材料危险点处于纯剪切应力状态，当横截面的最大切应力达到剪切屈服极限：

$\tau_{max}=\tau_s$时，材料发生剪切屈服失效，$\tau_{max}=\tau_s$就是剪切失效判据，剪切屈服极限τ_s就是剪切极限应力。根据常温静力拉伸和压缩试验，已建立起单向应力状态下的失效准则，考虑安全因数后，其强度条件统一为 $\sigma_{max}\leqslant[\sigma]$，而纯剪切应力状态下的失效准则，考虑安全因数后，强度条件统一为 $\tau_{max}\leqslant[\tau]$ 。

然而，岩石试件在单向和双向压缩时，虽然没有外加拉力，材料仍然发生脆性断裂。在大洋深处拾取的锰结核样品处于很高的静水压力作用下，却没有发现断裂破坏的痕迹。相反，低碳钢制成的试样在受到三向等值拉伸时，材料却呈现出脆性断裂的机理。因此，在复杂应力状态下，由于材料既受到正应力作用也受到切应力作用，不可以单独用正应力失效判据 $\sigma_{max}\leqslant[\sigma]$和切应力失效判据 $\tau_{max}\leqslant[\tau]$进行强度校核。材料发生哪种失效，既和材料本身有关，还将取决于材料所处的应力状态。此时必须先确定材料危险点应力的特征值，即主应力，然后建立在常温静载和复杂应力状态下的统一强度理论。强度理论是关于在外载荷作用下，材料失效原因与失效规律的假说或学说。其基本思想是：①确认引起材料失效存在共同的力学原因，提出关于这一共同力学原因的假设；②根据实验室中标准试件在简单受力情况下的破坏试验（如拉伸），建立起材料在复杂应力状态下共同遵循的弹性失效准则和强度条件；③实际上，当前工程上常用的经典强度理论都按脆性断裂和塑性屈服两类失效形式，分别提出共同力学原因的假设。

由于实际构件受力是多种多样的，其主应力间比值也因此而异。如果也仅用实验的方法去建立失效判据，那么就需要对每一种材料针对每一种主应力比值的应力状态进行实验，以确定每一种主应力比值下失效时的主应力值，这显然是不现实的。此外，对于某些应力状态，譬如三向等拉应力状态，进行这样的失效试验，在技术上也是难以实现的。科学家经过长期的研究发现材料失效是存在原因和规律的，在有限试验的基础上，可以对材料失效的现象加以归纳、整理，对失效原因做一些假说，即无论何种应力状态，也无论何种材料，只要失效模式相同，便具有同一个失效原因。这样，就可以通过轴向拉伸这一简单试验的结果，去预测材料在不同应力状态下的失效和建立材料在一般应力状态下的失效判据。因此，通过实验室中标准试件在简单受力（如简单拉伸）情况下的破坏试验，建立材料在各种复杂应力状态下共同遵循的失效准则。考虑安全因数后可进而建立起不同受力形式下构件的强度条件。显然，强度理论必须经受试验与实践的检验。实际上，也正是在反复试验与实践的基础上，强度理论才得到发展并日趋完善。目前，有许多种强度理论，下面只介绍工程中常用的几种强度理论。

7.9 工程中常用的四个强度理论

1. 最大拉应力理论（第一强度理论）

最大拉应力理论把材料脆断失效的主要原因归结为最大拉应力。认为，无论材料处于何种应力状态，只要最大拉应力 σ_1 达到材料单向拉伸脆断时的极限拉应力值 σ_u（即拉伸强度极限 σ_b），材料就发生脆断失效。按此理论，材料脆断失效的判据是

$$\sigma_1=\sigma_b \tag{7-31}$$

相应的强度条件为

$$\sigma_1 \leqslant [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b} \qquad (7\text{-}32)$$

试验表明，脆性材料在二向或三向拉伸断裂时，该理论与铸铁、岩石、工业陶瓷等多数脆性材料的试验结果较符合。该理论适用于拉伸型应力状态（如 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 > \sigma_3 = 0$），混合型应力状态中拉应力占优者（$\sigma_1 > 0$，$\sigma_3 < 0$，但 $|\sigma_1| > |\sigma_3|$）。但若发生剪断时，该理论与试验结果不符合。对于没有拉应力的三向压应力状态，不能应用此理论。

2. 最大伸长线应变理论（第二强度理论）

最大伸长线应变理论把材料脆断失效的主要原因归结为最大伸长线应变。认为无论材料处于何种应力状态，只要最大伸长线应变 ε_1 达到材料单向拉伸脆断时的极限拉应变值 ε_u，材料就发生脆断失效。按此理论，材料脆断失效的判据是

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_u \qquad (7\text{-}33)$$

在复杂应力状态下，由于三个主应变顺序为 $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2 \geqslant \varepsilon_3$。当 $\varepsilon_1 > 0$ 时，根据广义胡克定律，可以通过三个主应力计算出第一主应变 $\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$。根据脆性材料拉伸破坏试验中得到的拉伸强度极限 σ_b，通过弹性模量 E，换算脆断伸长线应变为 $\varepsilon_u = \sigma_b / E$。（请读者根据自己在拉伸试验中得到的脆性材料脆断伸长线应变 ε_u 的数值，判断换算的合理性）则材料脆断失效的判据变为

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_b \qquad (7\text{-}34)$$

相应的强度条件：

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leqslant [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b} \qquad (7\text{-}35)$$

试验表明，脆性材料在双向拉伸-压缩应力状态下，且压应力值大于拉应力值时，该理论与石料、混凝土等少数脆性材料的试验结果比较符合，能很好解释大理石在轴向压缩时（试件与实验机夹板间摩擦较小条件下）沿纵向开裂的失效现象。铸铁在混合型压应力占优应力状态下（$\sigma_1 > 0$，$\sigma_3 < 0$，$|\sigma_1| < |\sigma_3|$）的试验结果也较符合。

3. 最大切应力理论（第三强度理论）

最大切应力理论把材料屈服失效的主要原因归结为最大切应力 τ_{max}。认为无论材料处于何种应力状态，只要最大切应力 τ_{max} 达到材料单向拉伸屈服时的极限切应力值 τ_u，材料就发生屈服失效。按此理论，材料屈服失效的判据是

$$\tau_{max} = \tau_u \qquad (7\text{-}36)$$

在复杂应力状态下，最大切应力可以通过主应力计算得到：$\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$。单向拉伸屈服时的极限切应力值 τ_s 恰为横截面屈服应力的一半：$\tau_u = \tau_s = \sigma_s/2$。则最大切应力屈服准则为

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s \qquad (7\text{-}37)$$

相应的强度条件为

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leqslant [\sigma] = \frac{\sigma_s(\sigma_{0.2})}{n_s} \qquad (7\text{-}38)$$

试验表明，采用低碳钢、铜、软铝等塑性较好材料的屈服试验结果符合较好，并可用于分析像硬铝那样塑性变形较小无颈缩材料的剪切破坏。由于最大切应力理论只考虑了第一主

应力 σ_1 和第三主应力 σ_3 的作用，而未考虑第二主应力 σ_2 的影响，此理论的结果偏于安全（即偏高估计应力水平）。但是，由于此理论形式简单，便于计算，常用于工程设计。此准则也称屈雷斯卡屈服准则（Tresca Yield Criterion）。

4. 形状改变比能理论（第四强度理论）

形状改变比能理论把材料屈服失效的主要原因归结为形状改变比能。认为无论材料处于何种应力状态，只要形状改变比能 u_d 达到材料单向拉伸屈服时的极限形状改变比能 $(u_d)_u$，材料就发生屈服失效。按此理论，材料屈服失效的判据是

$$u_d=(u_d)_u \tag{7-39}$$

在复杂应力状态下，形状改变比能为

$$u_d=\frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]$$

在单向拉伸屈服时的极限形状改变比能则为

$$(u_d)_u=\frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_s-0)^2+(0-0)^2+(0-\sigma_s)^2]=\frac{1+\mu}{3E}\sigma_s^2$$

代入式（7-38），则形状改变比能准则为

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}=\sigma_s \tag{7-40}$$

相应的强度条件：

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}\leqslant[\sigma]=\frac{\sigma_s\text{或}\sigma_{0.2}}{n_s} \tag{7-41}$$

试验表明，形状改变比能理论同时考虑了三个主应力 σ_1、σ_2、σ_3 对塑性屈服的作用，采用低碳钢、铜、软铝等塑性较好材料的试验结果比第三强度理论符合得更好。此准则也称为米赛斯屈服准则（Mises Yield Criterion）。由于机械、动力行业遇到的载荷往往较不稳定，因而在工程实践中较多地采用偏于安全的第三强度理论。

W. Lode、G. I. Taylor 等几位学者，用软钢、铜、铝、合金钢等材料制成薄壁圆筒试件，进行拉-扭、拉（压）-内压等复合加载试验。由于圆筒壁厚方向是一个主应力方向，可以认为此主应力值为零，这样，将构造一个平面应力状态。调整各向载荷，可在各种主应力比值下求出屈服点、确定应力平面内屈服曲线形状。对于金属材料的试验研究表明，第三强度理论和第四强度理论都与试验结果偏差不大，而第四强度理论与实际更接近。在纯剪切应力状态下，屈服时主应力分别为：$\sigma_1=\tau_s$，$\sigma_2=0$，$\sigma_3=-\tau_s$。按照最大切应力理论，有 $\sigma_1-\sigma_3=2\tau_s=\sigma_s$，$\tau_s=\dfrac{\sigma_s}{2}$。

按照第四强度理论，有 $\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}=\sqrt{3}\tau_s=\sigma_s$，$\tau_s=\dfrac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\approx 0.577\sigma_s$。两个强度理论比较，在纯切应力状态时差别最大，第四强度理论的屈服应力比第三强度理论的屈服应力高约 $\dfrac{0.577\sigma_s-0.5\sigma_s}{0.5\sigma_s}\times100\%\approx15\%$。

7.10 相当应力

上述四个强度理论公式说明，当由强度理论来建立各种应力状态下材料失效判据时，是将主应力的某一综合值与材料单向拉伸时的极限应力相比较。主应力的这一综合值称为相当应力，见表 7-1，用 σ_r 表示。

表 7-1　四个强度理论的相当应力表达式

强度理论的分类及名称		相当应力表达式
第一类强度理论（脆断破坏的理论）	第一强度理论——最大拉应力理论	$\sigma_{r1}=\sigma_1$
	第二强度理论——最大伸长线应变理论	$\sigma_{r2}=[\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)]$
第二类强度理论（屈服失效的理论）	第三强度理论——最大切应力理论	$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3$
	第四强度理论——形状改变比能理论	$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}$

7.11 强度理论的应用

1. 强度理论选用原则

1）对于常温、静载、一般常见应力状态下，通常的塑性材料，如低碳钢，其失效形式为塑性屈服；通常的脆性材料，如铸铁，其失效形式为脆性断裂。因而可根据材料来选用强度理论：

脆性材料：
- 第一强度理论　用于拉伸型和拉应力占优的混合型应力状态。
- 第二强度理论　仅用于石料、混凝土等少数材料。

塑性材料：
- 第三强度理论　可进行偏保守（安全）设计。
- 第四强度理论　可用于更精确设计，要求对材料强度指标，载荷计算较有把握。

2）对于常温、静载但具有某些特殊应力状态的情况，不能只看材料，还必须考虑应力状态对材料失效状态的影响，根据所处失效状态选取强度理论。

3）塑性材料（如低碳钢）在三向等值（或近似等值）拉伸应力状态下呈脆断破坏，应选用第一强度理论，但此时的失效应力应通过能造成材料脆断的试验获得。

4）脆性材料（如大理石）在三向等值（或近似等值）压缩应力状态下呈塑性屈服失效状态，应选用第三、第四强度理论，但此时的失效应力应通过能造成材料屈服的试验获得。

2. 薄壁圆筒压力容器设计公式

（1）薄壁球形贮气罐　薄壁球形贮气罐如图 7-36a 所示，平均直径为 D_0，壁厚为 δ，材料许用

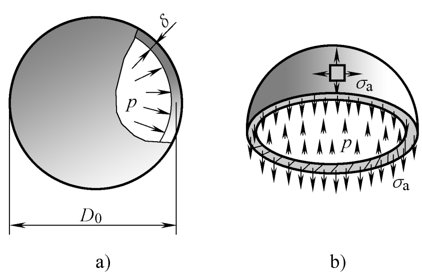


图 7-36　球形贮气罐示意图

应力 [σ]。试用第三强度理论确定最大内压 p。

由球对称特性知，径向应力与纬向应力相同，设为 σ_a。对球形贮气罐纵切，考虑形成的上半球静力平衡条件：

$$\sum F_y=0,\ \sigma_a\cdot\pi D_0\delta-\frac{\pi}{4}D_0^2\cdot p=0$$

$$\sigma_a=\frac{pD_0}{4\delta} \tag{7-42}$$

显然，在内压 p 作用下，筒壁内产生二向等值拉伸型应力状态如图 7-36b 所示：

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_a=\frac{pD}{4\delta},\ \sigma_3=p\approx 0$$

按照第三强度理论进行强度计算：

$$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=\frac{pD}{4\delta}\leqslant[\sigma]$$

所以

$$p\leqslant\frac{4\delta[\sigma]}{D}$$

（2）薄壁圆筒压力气罐　薄壁圆筒压力气罐如图 7-37a 所示，平均直径为 D_0，壁厚为 δ，材料许用应力 [σ]。试用第三强度理论确定最大内压。

在内压 p 作用下，筒壁内在纵截面和横截面均有拉应力。分别考虑由纵切（图 7-37b）与横切（图 7-37c）形成的部分薄壁圆筒的静力平衡条件。

沿 y 方向静力平衡方程为

$$\sum F_y=0,2\sigma''\cdot l\cdot\delta-\int_0^{\pi}p\cdot l\cdot\frac{D_0}{2}\,\mathrm{d}\theta\cdot\sin\theta=0$$

$$2\sigma''\cdot l\cdot\delta=plD_0$$

$$\sigma''=\frac{pD_0}{2\delta} \tag{7-43}$$

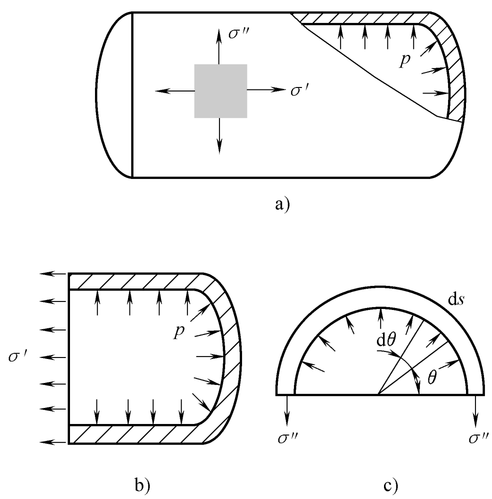


图 7-37　薄壁圆筒压力气罐

沿 x 方向静力平衡方程为

$$\sum F_x=0,\sigma'\cdot\pi D_0\delta-p\cdot\frac{\pi D_0^2}{4}=0$$

$$\sigma'=\frac{pD_0}{4\delta} \tag{7-44}$$

显然，在内压 p 作用下，筒壁内产生二向非等值拉伸型应力状态如图 7-37a 所示：

$$\sigma_1=\sigma''=\frac{pD_0}{2\delta},\sigma_2=\sigma'=\frac{pD_0}{4\delta},\ \sigma_3=p\approx 0$$

按照第三强度理论进行强度计算：

$$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=\frac{pD_0}{2\delta}\leqslant[\sigma]$$

则有

$$p\leqslant\frac{2\delta[\sigma]}{D_0}$$

7.12 采用有限元法进行应力应变分析*

随着现代科学技术的发展，人们正在不断建造更为快速的交通工具、更大规模的建筑物、更大跨度的桥梁和更为精密的机械设备。这一切都要求工程师在设计阶段就能精确地预测出产品和工程的技术性能，需要对结构的静、动力强度以及温度场、流体场和电磁场等物理场变量进行分析计算。这些物理问题用偏微分方程解法基本无法得出解析结果。近年来在计算机技术和数值分析方法支持下发展起来的有限元分析简称 FEA（Finite Element Analysis）方法，则为解决这些复杂的工程分析计算问题提供了有效的途径。

有限元法的基本思想是将连续的求解区域离散为一组有限个单元且按一定方式相互连接在一起的单元组合体。由于单元能按不同的连接方式进行组合，且单元本身可以有不同形状，因此可以模型化几何形状复杂的求解区域。显然，随着单元数目的增加，即单元尺寸的缩小，或者随着单元自由度的增加及插值函数精度的提高，解的近似程度将不断改进。如果单元是满足收敛要求的，则近似解最后将收敛于精确解。

目前，理工科各专业的学生普遍需要学习有限元基础知识并至少掌握一门有限元软件的使用方法，以便用有限元方法解决一些相对简单的工程实际问题，其中包括建模、计算、结果解释及误差分析。通过进一步的实践和提高，掌握各种 CAD 软件接口和二次开发工具，可以解决复杂多场耦合工程问题。

大型通用有限元分析软件 ANSYS，自 1971 年推出至今，已经发展成功能强大、前后处理和图形功能完备的有限元软件，并广泛地应用于工程领域。可以分析结构、动力学、传热、热力耦合、电磁耦合、流固耦合等领域的问题。ANSYS 采用开放式结构：提供了与 CAD 软件的接口，用户编程接口 UPFs，参数化设计语言 APDL。

1. ANSYS 分析基本流程

ANSYS 分为系统层、功能模块层两层结构。软件有两种模式：一种是图形交互菜单模式，另一种是批模式。交互菜单模式适合初学者采用，包括建模、求解、文件操作、图形控制及结果分析等。但若分析的问题很复杂，就应当把分析问题的命令做成命令流文件，利用批模式进行分析。本教材简介交互菜单模式（以后简称菜单模式）操作 ANSYS。顺利安装软件并进行必要的配置后，进入 ANSYS 系统后会有六个窗口，提供使用者与软件之间的交流，凭借这六个窗口可以非常容易地输入命令、检查模型的建立、观察分析结果及图形输出与打印。整个窗口系统称为 GUI（Graphical User Interface）。如图 7-38 所示，ANSYS 各窗口及工具条的功能如下：

（1）应用命令菜单（Utility Menu） 位于屏幕的最上方，包含各种应用命令，如文件控制（File）、对象选择（Select）、资料列式（List）、图形显示（Plot）、图形控制（Plot Ctrls）、工作界面设定（Work Plane）、参数化设计（Parameters）、宏命令（Macro）、窗口控制（Menu Ctrls）及辅助说明（Help）等。

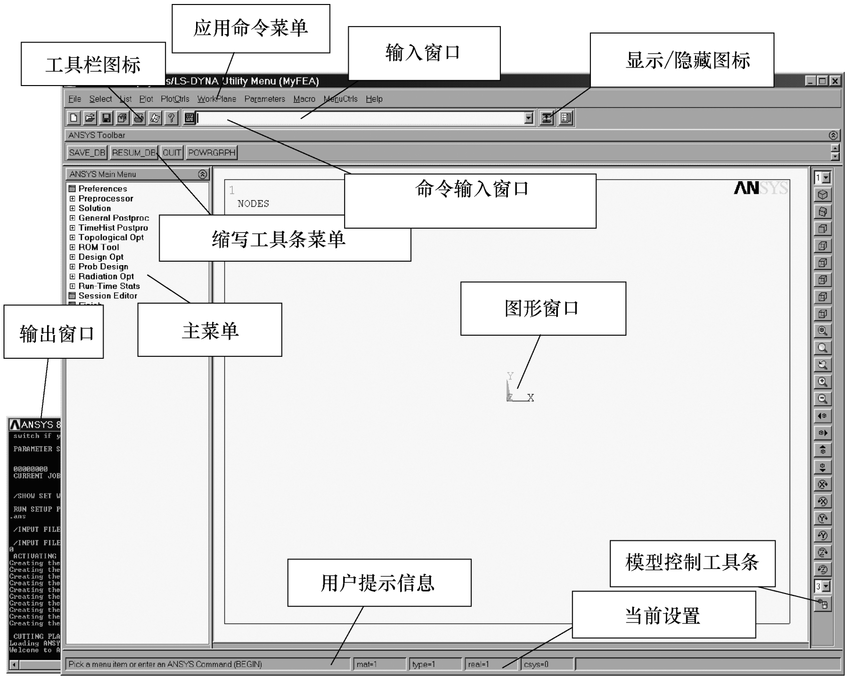


图 7-38　ANSYS 的窗口及工具条

（2）主菜单（Main Menu）　在屏幕的最左侧，包含分析过程的主要命令，如建立模块、施加载荷和边界条件、分析类型的选择、求解过程控制等。

（3）工具栏（Toolbar）　由工具栏图标可知，与 Word 类似，它是执行命令的快捷方式。

（4）输入窗口（Input Window）　该窗口是输入命令的地方，同时可监视命令的历程。

（5）图形窗口（Graphic Window）　显示使用者所建立的模块及查看结果分析。

（6）输出窗口（Output Window）　该窗口叙述了输入命令执行的结果。

（7）模型控制工具条（Model Contrl Toolbar）　该控制工具条窗口内的按钮控制图形的缩放、平移和旋转。尤其是最后一个“自由按钮”（模型控制工具条的箭头所指）具有动态模型模式“Dynamic model mode”，单击后，按住鼠标左键可以平移图形，滚动中间滚轮可以缩放图形，按住鼠标右键图形可以随手腕的旋动而做三维旋转。

2. ANSYS 的架构及命令

ANSYS 解决问题的基本操作流程如下：

步骤 1：前处理（General Preprocessor，也用 PREP7 表示）

1）设定偏好（Preference），即：选定工作的学科领域；

2）选定单元类型；

3）指定材料属性；

4）几何建模；

5）网格划分。

步骤 2：求解处理（Solution Processor，也用 SOLU 表示）

1）载荷条件设置；

2）边界条件设置；

3）求解类型与参数设置；

4）求解。

步骤 3：运行通用后处理器（General Postprocessor，也用 POST1 表示）或运行时间历程后处理器（Time Domain Postprocessor，也用 POST26 表示）

1）POST1 用于静态结构分析、屈曲分析及模态分析，将解得的结果如：位移、应力、约束力等信息，通过图形接口以各种不同表示方式把位移图、应力云图等显示出来。

2）POST26 仅用于动态结构分析，用于与时间相关的时域处理。

3. ANSYS 的启动

第一次使用 ANSYS 时，在 ANSYS 的目录下选择 Mechanical APDL Product Launcher，屏幕会出现 ANSYS Launcher 的接口，用户可以进行必要的环境设置。ANSYS Launcher 有许多选项可供操作，但是对初学者而言，大部分是不需要去变动的，一般可以设定最大可用的内存数和根据硬件配置设定工作的 CPU 数等。环境设置后选择 RUN 会启动 GUI 开始 ANSYS 分析程序，进入 GUI 界面。

在 ANSYS 的下拉菜单中点选 Mechanical APDL（ANSYS）图标，就会进入一个称为 GUI（Graphic User Interface）的图形用户界面。初学者除学习使用各种 ANSYS 命令之外，参阅 ANSYS 的操作说明尤其是 Help 会很有帮助。在启动 GUI 后，可以进入文件管理（File Management）更改工作目录（Working Directory）及工作文件名（Jobname）。Working Directory 用来指定工作目录。ANSYS 在分析过程中会产生很多工作文档，这些临时或永久性的档案会置放在这个工作目录内，所以最好设定一个专用的数据夹来储存这些文档。Jobname 的内定档名是 file。ANSYS 所产生的文档名都是用此 Job name，再加上扩展名。每次执行 ANSYS 时，旧的文档会被新的文档所覆盖。最好将分析项目指定一个有意义并且好记的 Jobname。另外，一个简单的执行 ANSYS 的批处理模式的方法是在 GUI 界面下，在 File Menu 中点选 Read Input From 文本文件全名，可以让 ANSYS 去读取一个文本文件内的 ANSYS 命令。

4. 单位系统

ANSYS 没有规定要用何种单位输入，你的输入数据也不必让 ANSYS 知道是什么单位。有时，在其他物理领域的分析中可能有第四种或第五种基本单位（温度、电流），这时很容易将单位弄错，建议尽量用 SI 单位制。在 SI 制中，长度是 m、质量是 kg、时间是 sc、温度是 K、电流是 A，其他的单位必须是由这些基本单位导出来，例如功率的单位是 W、电压的单位是 V 等。但也有例外，例如在 MEMS（微机构）中，长度和质量通常都是很小的，如果使用 m 及 kg，则数字变得很小（约 10^{-6}）。但是有些数目还是很大，例如弹性模量（约 10^{9}）或质量密度（约 10^{3}）。在计算机运算时太大及太小的数目互相运算很容易产生舍入误差（rounding error），这种误差可能严重地影响最后解答的精度；许多非线性分析可能因舍入误差而造成收敛的困难。所以谨慎地选择一种单位系统是很重要的。总之，你必须严格地维持单位的一致性（consistency）。例如：当长度单位用 m、质量单位用 kg、时间单位用 s、力单位用 N 时，质量密度单位用 kg/m^3，应力、压强或弹性模量要使用 Pa（而非 MPa）单位。而在机械和结构分析时，通常长度单位用 mm、质量单位用 kg、时间单位用 s、力单位用 N，此时密度单位要使用 t/mm^3（其中，t 表示吨 1t = 1000kg，其推导过程读者可自行完成），应力、压强或弹性模量要使用 MPa。

5. ANSYS 实例练习

（1）梁的受力与变形分析问题描述　由工字钢构成的外伸梁及其支承和载荷分布如图 7-39a 所示，其截面形状如图 7-39b 所示，各种参数见表 7-2。求支点约束力、梁在中间截面处的最大应力和挠度。

表 7-2

材料参数	几何参数	载荷集度
$E=200\text{GPa}$ $\mu=0.3$	$l=4000\text{mm}$ $a=2000\text{mm}$ $t=100\text{mm}$ $b=120\text{mm}$ $h=600\text{mm}$ $w=500\text{mm}$	$q=200\text{N/mm}$

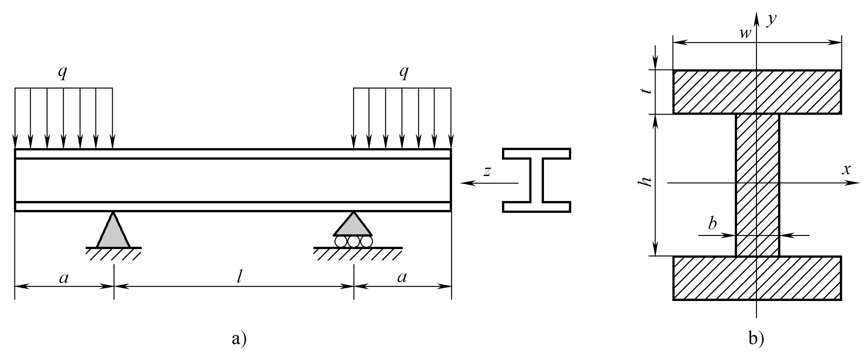


图 7-39　简支梁有限元模型

a）简支梁模型　b）有限元梁的截面

（2）计算步骤

1）建立有限元模型

① 选择单元

main menu→preprocessor→element type→add/edit/delete

如果未选择单元，出现如图的界面，单击按钮“Add…”，弹出单元库选择界面：

在左侧列表框中选择“beam”，在右侧列表框中选择“2 node 188”→单击 OK 返回。

② 确定截面参数

Main Menu：Preprocessor→Sections→Beam→Common Sections→定义 I 型截面，ID：1，Name，左边下拉框选 I 的形状图，在尺寸栏，按照图标提示，依次填入 W1 = 500，W2 = 500，W3 = 600，t1 = 100，t2 = 100，t3 = 120→OK

③ 确定材料参数

Main menu→preprocessor→material props→material models

在弹出的“Define Material Model Behavior”界面中双击 structural→linear→elastic→isotropic→输入：EX：200e3，PRXY：0.3→OK

2）建立几何模型：生成代表简支梁的直线段。

① 生成线段的端点（注意：长度单位 mm）

main menu→preprocessor→modeling→create→keypoints→in active cs

在 NPT 域输入关键点（keypoint）编号，先输入 1→在 X，Y，Z Location in active CS 域输入坐标：（0，0，0）→Apply→再输入关键点编号 2→在 X，Y，Z Location in active CS 域输入坐标：（800，0，0）→点击 OK 返回。

② 连接端点生成直线段

main menu→preprocessor→modeling→create→lines→lines→straight line→出现拾取框后，用鼠标选取两个关键点后→点击 OK 返回。

③ 设定网格划分参数

将梁均匀地分为 8 个单元，也可以划分为更多的单元，要注意使支撑点与结点重合。

Main Menu：Preprocessor→Meshing→MeshTool→Lines→Set→在拾取框中，点击 Pick All→在下一个框的第二栏中，NDIV：8→OK→划分网格：Mesh→Pick All→OK→关闭 MeshTool 框 Close。

④ 选择显示结点编号

Utility Menu→Plotctrls→Numbering→在 NODE 框打勾→点击 OK 返回。

3）施加边界条件及加载

① 在支撑位置施加位移约束

main menu→Solution→Define loads→Apply→Sstructural→Displacement→On nodes

弹出选择框，拾取结点 4→Apply→弹出位移选择框，拾取 UX，UY，UZ，ROTX，ROTZ→下一栏填 0→Apply→弹出选择框，拾取结点 8→OK→弹出位移选择框，拾取 UY，UZ，ROTX，ROTZ→下一栏填 0→OK

② 定义均布载荷

Main menu→Solution→Ddefine loads→Aapply→Structural→Pressure→On beams

弹出选择界面，分别拾取最左侧的那 2 个单元和最右侧的那 2 个单元→Apply，弹出以下加载界面：在 LKEY Load key 栏内输入 1，在“Pressure value at node I”域输入 200，在“Pressure value at node J”域输入 200→OK

4）求解

main menu→Solution→Current LS→OK，求解。

出现“Solution is done”→Close

后处理

① 列出支点约束力

Main menu→General postproc→List results→Reaction solu

在“List Reaction Solution”对话框中选择“All struc forc F”，列出全部的结点支约束力。

② 显示梁的位移分布

Main menu→General postproc→Plot results→Deformed Shape→选择“Def+ undeformed”→OK。

屏幕显示出梁的位移分布和最大结点位移值。

③ 显示出梁单元的几何形状。

Utility Menu：PlotCtrls→Style→Size and Shape→/ESHAPE　Display element 右边框打勾，显示 On→OK

④ 显示梁内 x 方向的正应力分布

Main menu→General Postproc→Plot results→Contour plot→Nodal solu→Stresses→X Component of stress →OK

本章小结

1. 应力状态是指通过“一点”不同截面上的应力情况，它可以用围绕该点三对相互垂直的微面构成的微正六面体来表示，如果作用于三对微面上的应力分量已知，则该点的应力状态即为已知。

2. 应力分析即根据已知应力状态求解任意指定斜截面上应力及相应方位微元体的三对微面上的应力。本单元着重对平面一般应力状态做应力分析，其基本方法为截面法，利用平衡条件可求得平行 z 轴且与 x 轴成 α 倾角的斜截面上应力表达式：

$$\sigma_\alpha=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)+\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\cos2\alpha-\tau_{xy}\sin2\alpha \tag{a}$$

$$\tau_\alpha=\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\sin2\alpha+\tau_{xy}\cos2\alpha \tag{b}$$

3. 主应力即正应力极值，或切应力为零的微面上的正应力，平面应力状态一般有两个非零主应力：

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^{\ 2}}$$

位于与 x 面成 α_0、$\alpha_0+90°$ 倾角的两个主平面上：

$$\tan2\alpha_0=-\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

无论材料处于什么应力状态，最大切应力都应当按照三向应力状态的公式计算，即最大主应力和最小主应力之差的一半：

$$\tau_{\max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$$

$\tau_{\max}$ 的作用面与 σ_1 作用面和 σ_3 作用面成夹角±45°。

4. 应力分析除了上述解析法外，图解法（应力圆法）也非常简洁方便。应力圆法的理论基础是应力圆方程。按一定步骤可以方便地作出相应平面一般应力状态的应力圆。正确掌握微元体上的“面”与应力圆上的“点”的对应关系是应用应力圆法求解指定截面上应力的关键。

5. 空间一般应力状态具有三个非零主应力 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3$。约定：三个主应力按代数值从大到小排列。

6. 广义胡克定律描述材料在线弹性范围内，小变形条件下的应力分量与应变分量的关系。对于各向同性材料，主应力形式的表达式为

$$\varepsilon_1=\frac{1}{E}[\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{E}[\sigma_2-\mu(\sigma_3+\sigma_1)]$$

$$\varepsilon_3=\frac{1}{E}[\sigma_3-\mu(\sigma_1+\sigma_2)]$$

平面一般应力状态下，平面内任意方向 n_α 方位上的应变分量：

$$\varepsilon_\alpha=\frac{1}{E}[\sigma_\alpha-\mu\sigma_{\alpha+90^\circ}]$$

$$\varepsilon_{\alpha+90^\circ}=\frac{1}{E}[\sigma_{\alpha+90^\circ}-\mu\sigma_\alpha]$$

$$\gamma_\alpha=\frac{\tau_\alpha}{G}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_\alpha$$

7. 对于材料在线弹性范围内，小变形条件下，基于能量守恒原理，缓慢加载的外力功全部转化为受力构件的弹性变形能。对各向同性材料，主应力形式的应变能（比能）表达式为

$$u=\frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1+\frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2+\frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3=\frac{1}{2E}[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\mu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)]$$

若把 σ_1、σ_2、σ_3 作用的应力状态分为平均应力 $\sigma_{\mathrm{m}}=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$ 作用下只产生体积改变，不产生形状改变的静水应力状态和偏应力 $S_1=\sigma_1-\sigma_{\mathrm{m}}$，$S_2=\sigma_2-\sigma_{\mathrm{m}}$，$S_3=\sigma_3-\sigma_{\mathrm{m}}$ 作用下只产生形状改变不产生体积改变的偏应力状态，则应变能可以分为体积改变比能 u_V 和形状改变比能 u_d，即

$$u=u_V+u_d$$

其中

$$u_V=3\left(\frac{\sigma_{\mathrm{m}}\varepsilon_{\mathrm{m}}}{2}\right)=\frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2$$

$$u_d=\frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]$$

8. 从材料的拉伸、压缩、扭转等简单试验及大量工程构件的“破坏”（弹性失效）现象中，人们发现在常温、静载条件下，材料有两种基本的弹性失效形态，即脆性断裂与塑性屈服。材料表现为某种失效形态不是固定不变的，还受所处应力状态的影响，例如，三向拉伸应力状态会加强材料的脆化倾向，三向压缩应力状态对材料有韧化作用。

9. 强度理论（弹性失效准则）提出引起材料“破坏”（弹性失效）的共同力学原因的假设，通过实验室中标准试件在简单受力（如简单拉伸）情况下的破坏试验，建立材料在各种复杂应力状态下共同遵循的失效准则。考虑安全因数后可进而建立起不同受力形式下构件的强度条件。

10. 四个经典强度理论中，第一、第二强度理论针对脆性断裂分别提出最大拉应力和最大拉应变为引起材料脆断的共同原因。其中

第一强度理论表达为

$$\sigma_1=\sigma_{\mathrm{b}},\sigma_1\leqslant[\sigma]=\frac{\sigma_{\mathrm{b}}}{n_{\mathrm{b}}}$$

第二强度理论表达为

$$\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)=\sigma_b,\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)\leqslant[\sigma]=\frac{\sigma_b}{n_b}$$

第一强度理论适用于拉伸型应力状态（$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 > \sigma_3 = 0$）和混合型中拉应力占优的应力状态（$\sigma_1>0$，$\sigma_3<0$，但$|\sigma_1|>|\sigma_3|$）下的大多数脆性材料；第二强度理论适用于少数脆性材料，如石料、混凝土受压缩。

第三、第四强度理论针对塑性屈服分别提出最大切应力和形状改变比能为导致材料进入失效形式的共同原因。其中第三强度理论表达为

$$\sigma_1-\sigma_3=\sigma_s,\sigma_1-\sigma_3\leqslant[\sigma]=\frac{\sigma_s}{n_s}$$

第四强度理论表达为

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}=\sigma_s$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}\leqslant[\sigma]=\frac{\sigma_s}{n_s}$$

此两理论都较好地描述了材料的屈服规律。第三强度理论偏于安全，因而更多地应用于机械、动力等工程部门，且用于“剪断”这一失效形态。第四强度理论要求较为严密，更多地应用于载荷，材料强度性能更加稳定的（如土木建筑等）工程部门。

思　考　题

7-1　关于用微元体表示一点处的应力状态，有如下论述，正确答案是____。

（A）微元体形状可以是任意的，只要有应力分量就行；

（B）微元体形状不是任意的，只能是六面体微元；

（C）不一定是六面体微元体，五面体微元体也可以，其他形状则不行；

（D）微元体形状可以任意，但各应力分量要满足微元体的静力平衡条件。

7-2　受力构件内取一个60°等边三角微元体，应力如图 7-40 所示，$\tau=\sigma/\sqrt{3}$。此点的主应力为____。

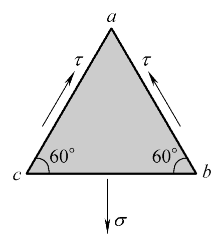


图 7-40　思考题 7-2 图

7-3　图 7-41 所示悬臂梁，在梁上施加了两个集中力 F。试判断 A、B、C、D、E、F 点分别处于什么应力状态？

7-4　一个处于平面应力状态的立方微元体，其上下面和左右面均受到相同数值的压应力及切应力作用。试判断该微元体处于什么应力状态？

7-5　图 7-42 所示的四个应力状态中，哪些应力状态等价？

7-6　一个立方微元体受应力作用如图 7-43 所示，应力单位为 MPa。试根据其承受的应力判断该立方微元体中最大切应力的作用面为____。

7-7　已知微元体 A、B 面与应力圆中 A、B 点对应，如图 7-44 所示。应力单位：MPa。试根据已知应力圆中 A 点坐标确定 B 点的应力数值及所对应的微元体图为__________。

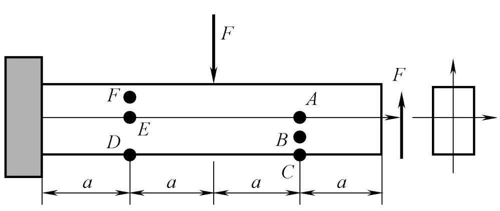


图 7-41　思考题 7-3 图

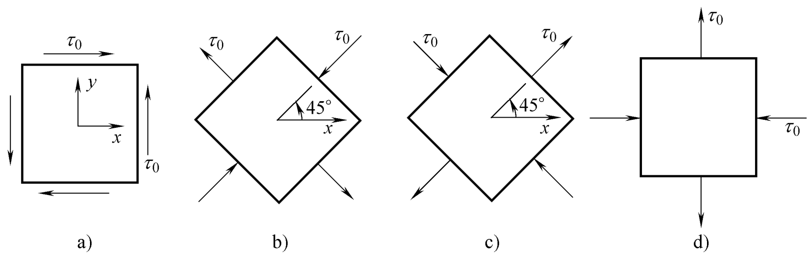


图 7-42 思考题 7-5 图

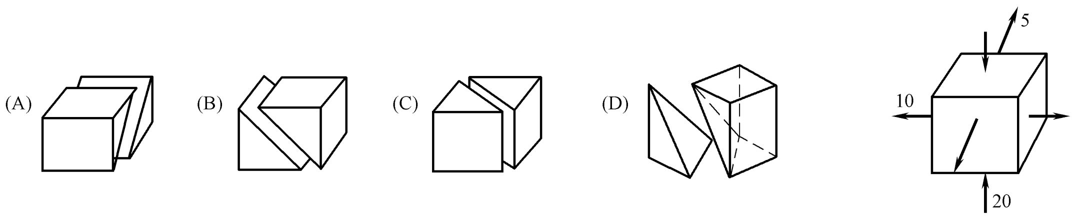


图 7-43 思考题 7-6 图

7-8 对于一个处于纯剪切应力状态的平面矩形单元体，若测出 x、y 方向的正应变 ε_x、ε_y。在弹性常数 E、G 和 μ 中，可以确定哪些常数？

7-9 材料的三个弹性常数之间的关系 $G=\dfrac{E}{2(1+\mu)}$成立的条件是什么？

7-10 一根受轴向拉伸的矩形截面杆表面贴有直角应变花，如图 7-45 所示。材料的弹性模量 $E=200\text{GPa}$，泊松比 $\mu=0.3$，横截面应力 σ。如果应变仪预先已经平衡，则应变片的读数绝对值 $|\varepsilon_1|$、$|\varepsilon_2|$、$|\varepsilon_3|$的大小顺序为____________。

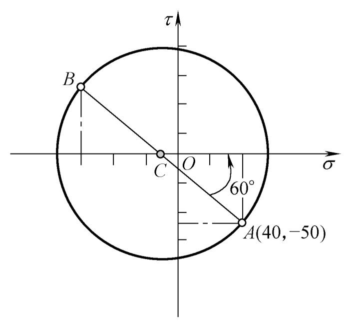


图 7-44 思考题 7-7 图

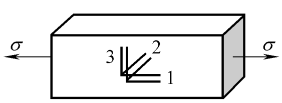
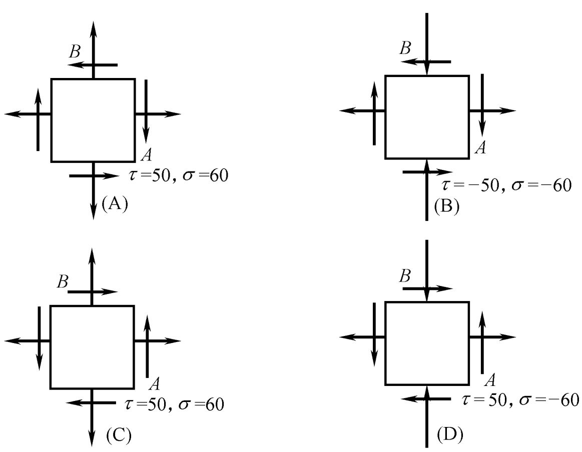


图 7-45 思考题 7-10 图



7-11　就材料点而言，是否可以说：若 $\varepsilon_x = 0$，则必有 $\sigma_x = 0$？或 $\sigma_x = 0$，则必有 $\varepsilon_x = 0$？试分析之。

7-12　受到内压作用的薄壁圆筒，筒壁上危险点所对应的应力圆有四种可能形式，正确的是哪一种________？

7-13　薄壁球形贮气罐的筒壁上危险点的应力圆应该是什么形状？

7-14　水管遇冬天严寒天气，会因水受冻结冰而胀破，显然水管中的冰也承受同样的反作用力，为何冰不破碎而水管破裂？

7-15　下面有关强度理论知识的几个论述，正确的是__________。

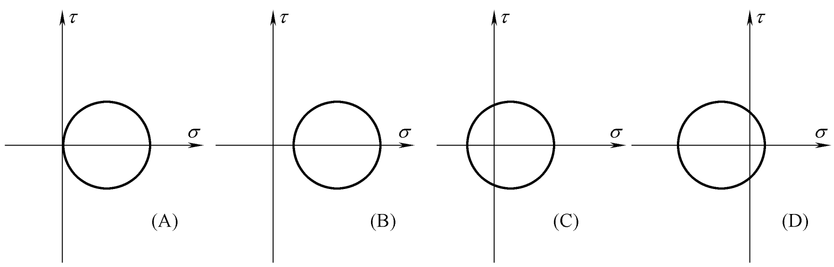
（A）需模拟实际应力状态逐一进行试验，确定极限应力；

（B）无须进行试验，只需提出关于材料破坏原因的假说；

（C）需要进行有限次数简单试验，无须关于材料破坏原因的假说；

（D）假设材料破坏的共同原因，同时需要有限次数简单试验结果。

7-16　微元体为平面应力状态如图 7-46 所示。$\sigma_x = -\sigma$，$\sigma_y = 3\sigma$，$\tau_{xy} = \sigma$。材料为钢材，许用应力 $[\sigma]$，则可选用什么强度理论进行强度校核？其强度校核条件是什么形式？若材料为铸铁，许用拉应力为 $[\sigma_t]$，则可选用什么强度理论？其强度校核条件是什么形式？



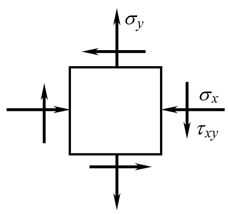


图 7-46　思考题 7-16 图

7-17　如图 7-47 所示，微元体①和②为塑性材料，微元体③和④为脆性材料。应力单位：MPa。如果采用第三强度（最大切应力）理论校核微元体①和②的强度，采用合适的强度理论校核微元体③和④的强度，则在图示应力作用下，微元体①与微元体②相比较，哪个更危险？微元体③与微元体④相比较，哪个更危险？

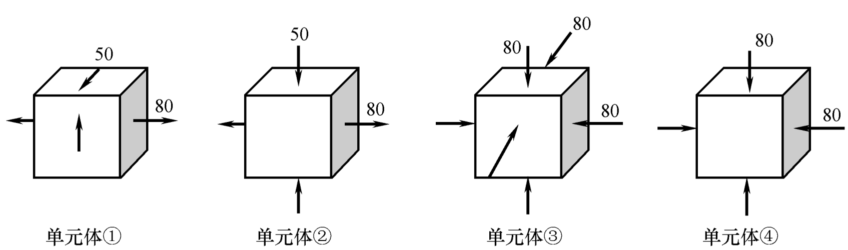


图 7-47　思考题 7-17 图

习 题

7-1　已知应力状态如图 7-48a、b、c 所示，求指定斜截面 a—b 上的应力，并画在单元体上。

7-2　一圆轴受力如图 7-49 所示，已知固定端横截面上的最大弯曲应力为 40MPa。最大扭转切应力为 30MPa，因剪力而引起的最大切应力为 6kPa。

（1）用单元体画出在 A、B、C、D 各点处的应力状态；

（2）求 A 点的主应力和切应力极值及其作用面的方位。

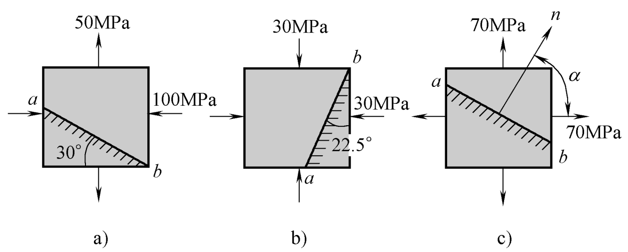


图 7-48　题 7-1 图

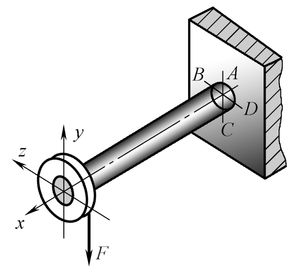


图 7-49　题 7-2 图

7-3　已知应力状态如图 7-50 所示，图中应力单位皆为 MPa。试用解析法及图解法求：（1）主应力大小、主平面位置；（2）在单元体上绘出主平面位置及主应力方向；（3）切应力极值。

7-4　有一拉杆，如图 7-51 所示，由两段杆沿 m—n 面胶合而成。已知杆件横截面面积 $A=2000\text{mm}^2$，如要求胶合面上作用的拉应力为 $\sigma_\alpha=10\text{MPa}$，切应力为 $\tau_\alpha=6\text{MPa}$。试求此时胶合面倾角 α 和轴向拉伸载荷 F。

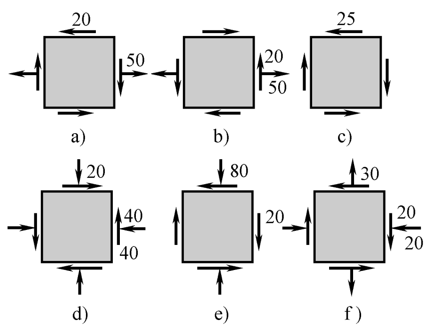


图 7-50　题 7-3 图

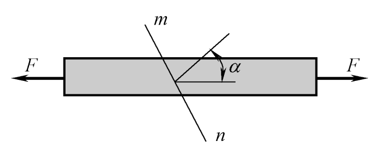


图 7-51　题 7-4 图

7-5　二向应力状态如图 7-52 所示，应力单位为 MPa。试求主应力并作应力圆。

7-6　工字钢梁的截面尺寸如图 7-53 所示，单位：mm。已知 $h=180\text{mm}$，$b=94\text{mm}$，$t=10.7\text{mm}$，$d=6.5\text{mm}$，$F=150\text{kN}$，材料的弹性模量 $E=210\text{GPa}$，泊松比 $\mu=0.3$，$I_z=16.59\times10^6\text{mm}^4$。试求 C 点处的线应变 ε_{0°、ε_{45°、ε_{90°。

7-7　试求图 7-54 所示各平面应力状态的单元体的三个主应力及最大切应力（应力单位为 MPa）。

7-8　图 7-55 所示一钢制圆截面轴，直径 $d=60\text{mm}$。材料的弹性模量 $E=210\text{GPa}$。泊松比 $\mu=0.28$，用电测法测得 A 点与水平线成 45°方向的线应变 $\varepsilon_{45^\circ}=431\times10^{-6}$，求轴受的外力偶矩 M。

7-9　如图 7-56 所示，在矩形截面钢拉伸试件的中段 B 点处，与其轴线成 30°方向贴上应变片。当拉力 $F=20\text{kN}$ 时，测得应变片的线应变为 $\varepsilon_{30^\circ}=3.25\times10^{-4}$。已知该试件材料的弹性模量 $E=210\text{GPa}$，求泊松比 μ。

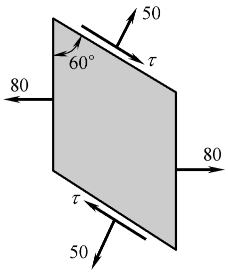


图 7-52　题 7-5 图

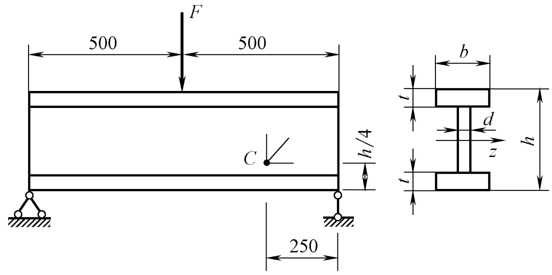


图 7-53　题 7-6 图

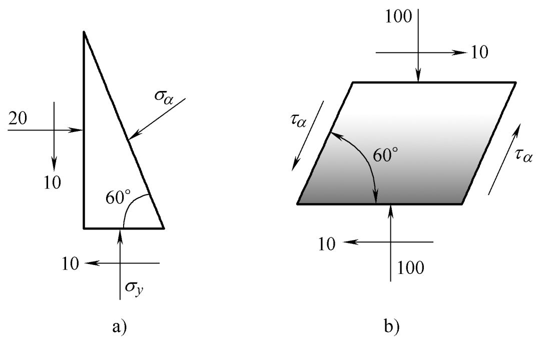


图 7-54　题 7-7 图

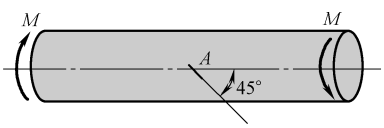


图 7-55　题 7-8 图

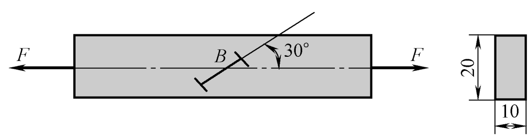


图 7-56　题 7-9 图

7-10　在二向应力状态下，设已知最大切应变 $\gamma_{\max}=5\times10^{-4}$，并已知两个相互垂直方向的正应力之和为 27.5MPa。材料的弹性模量是 $E=200\text{GPa}$，$\mu=0.25$。试计算主应力的大小。

7-11　若已测得等角应变花三个方向的应变分别为 $\varepsilon_{0^\circ}=0.00040$，$\varepsilon_{60^\circ}=0.00040$，$\varepsilon_{120^\circ}=-0.00060$，试求主应变及其方向。若材料为碳钢，$E=200\text{MPa}$，$\mu=0.25$，试求主应力及其方向。

7-12　如图 7-57 所示，在一体积较大的钢块上开一个贯穿的槽，其宽度和深度都是 10mm。在槽内紧密无隙地嵌入一铝质立方块，它的尺寸是 10mm×10mm×10mm。当铝块受到压力 $F=6\text{kN}$ 的作用时，假设钢块不变形。铝的弹性模量 $E=70\text{GPa}$，$\mu=0.33$。试求铝块的三个主应力。

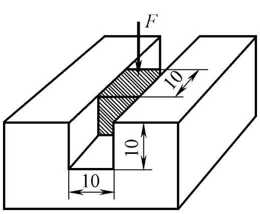


图 7-57　题 7-12 图

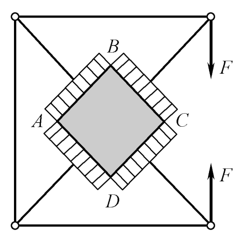


图 7-58　题 7-13 图

7-13　方块 $ABCD$ 尺寸是 70mm×70mm×70mm，通过专用的压力机在其四个面上作用均匀分布的压力，如图 7-58 所示。若 $F=50\text{kN}$，$E=200\text{GPa}$，$\mu=0.3$，试求方块的单位体积的体积改变 θ。

7-14　炮筒横截面如图 7-59 所示。在危险点处，$\sigma_t=550\text{MPa}$，$\sigma_r=-350\text{MPa}$，第三个主应力垂直于图面是拉应力，且其大小为 420MPa。试按第三强度理论，计算其相当应力。

7-15　对图 7-60 所示三种应力状态，试按第一、第三强度理论，写出其相当应力。

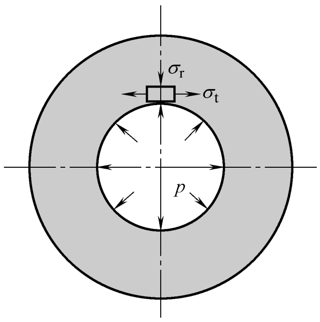


图 7-59　题 7-14 图

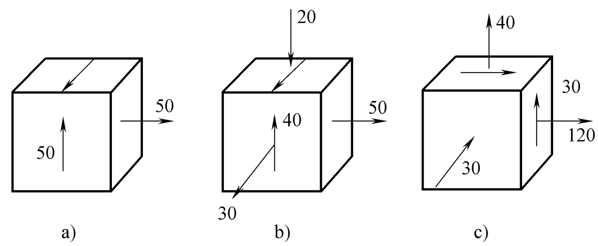


图 7-60　题 7-15 图

7-16　一简支钢板梁受载荷如图 7-61a 所示，它的截面尺寸如图 7-61b 所示。已知钢材的许用应力为 $[\sigma]=170\text{MPa}$。试按第四强度理论对危险截面上的 2 点（位置为翼缘与腹板的交界处）作强度校核。

7-17　铸铁薄管如图 7-62 所示。管的外径为 200mm，壁厚 $t=15\text{mm}$，内压 $p=4\text{MPa}$，$F=200\text{kN}$。铸铁的抗拉及抗压许用应力分别为 $[\sigma_t]=30\text{MPa}$，$[\sigma_c]=120\text{MPa}$，$\mu=0.25$。试用第二强度理论校核薄管的强度。

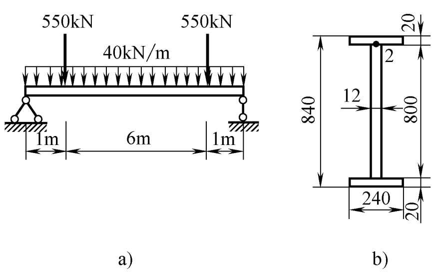


图 7-61　题 7-16 图

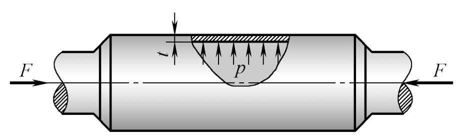


图 7-62　题 7-17 图

7-18　某塑性材料，用其制成的构件中有图 7-63a、b 所示的两种应力状态。试按最大切应力理论判断哪种应力状态较易进入屈服（设 $2|\sigma|>3|\tau|$）。

7-19　人们采用承受拉伸、扭转与内压组合作用的薄壁圆筒对铜、铝、软钢等材料做屈服试验，以验证最大切应力强度理论。已知图 7-64 所示试件平均直径 D_0，壁厚 t，扭矩 M_x，轴向拉力 F，内压强 p。要求：（1）画出圆筒的应力状态，并写出相应应力分量的表达式；（2）设塑性材料的许用应力为 $[\sigma]$，根据最大切应力理论，写出此组合作用的薄壁圆筒的强度校核公式。

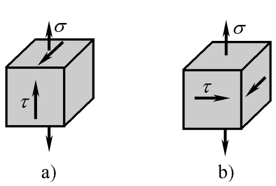


图 7-63　题 7-18 图



图 7-64　题 7-19 图

7-20　钢制圆柱形薄壁容器承受内压作用，已知平均直径 $D=1.8\text{m}$，壁厚 $\delta=14\text{mm}$，材料屈服极限 $\sigma_3=400\text{MPa}$，若要求安全因数 $n_s=6.0$，试确定此容器所能承受的最大内压力：（1）用最大切应力理论；（2）用形状改变比能理论。

7-21　一个广告牌由立柱支撑，忽略结构自重。风载荷沿集中载荷 x 的反方向垂直作用于广告牌，可认为合力作用在广告牌中心，其面积 $A=1\text{m}\times0.5\text{m}$，风载荷集度 q。钢质立柱直径 $d=50\text{mm}$，材料的许用应力 $[\sigma]=280\text{MPa}$。弹性模量 $E=200\text{GPa}$，泊松比 $\mu=0.25$。如图 7-65 所示，在底部立柱的表面 A 点粘贴两个应变片（电桥预先平衡），已经测出两个应变片的读数为 $\varepsilon_1=858.5\times10^{-6}$ 和 $\varepsilon_2=170.9\times10^{-6}$。（1）计算风载荷集度 q；（2）若不计弯曲切应力的影响，按第三强度理论校核强度。

7-22　一根钢质平面直角曲拐 $ABCD$，实心圆轴 ABC 的长度 $2a$，直径 $d=0.1\text{m}$。曲拐 CD 的长度为 $w=0.5\text{m}$。在曲拐 D 端面，沿 x 反方向垂直作用一个集中载荷 F。材料的许用应力 $[\sigma]=200\text{MPa}$。弹性模量 $E=200\text{GPa}$，泊松比 $\mu=0.3$。不计材料自重。如图 7-66 所示，在圆轴 ABC 中部 B 段的顶部表面粘贴两个应变片（电桥预先平衡，方位如图所示），已经测出两个应变片的读数为 $\varepsilon_1=858.5\times10^{-6}$ 和 $\varepsilon_2=170.9\times10^{-6}$。（1）计算集中载荷 F 的大小；（2）若不计弯曲切应力的影响，按第三强度理论校核实心圆轴 ABC 的强度。

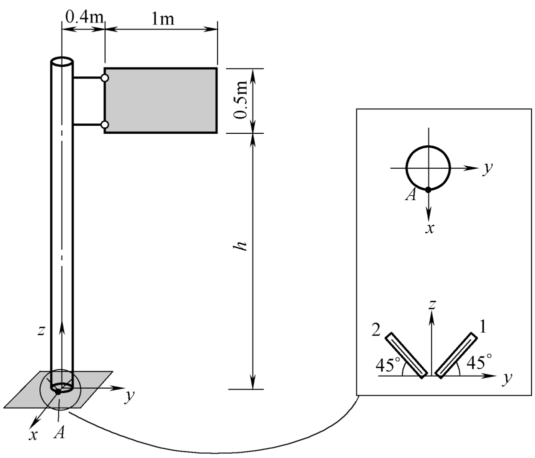


图 7-65　题 7-21 图

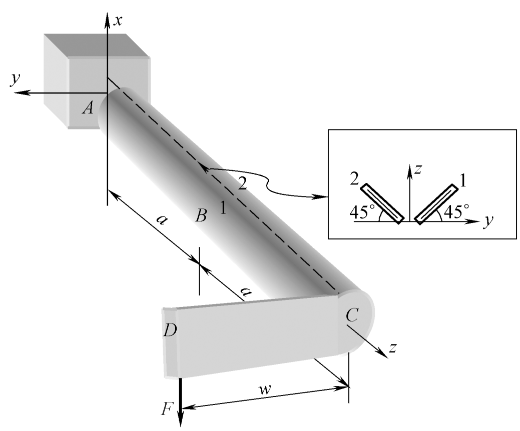


图 7-66　题 7-22 图

7-23　ANSYS 分析超静定桁架

问题描述：超静定桁架受水平力 10^7N 作用，下面三点支撑约束。材料为普通钢材弹性模量 200GPa，泊松比 0.3。计算分析模型如图 7-67 所示。目的是学习使用空间杆单元和利用各种建模命令高效地创建空间桁架。

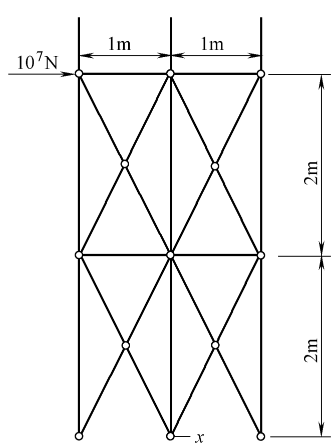


图 7-67　题 7-23 图　超静定桁架分析模型

ANSYS 菜单操作步骤：

1. Main Menu：Preference→选中 Structural→OK，指定分析范畴为结构分析

2. Utility Menu：File → Change Jobname，输入文件名：Truss Structure

3. 选择单元类型

Main Menu：Preprocessor→Element Type→Add/Edit/Delete→Add→Link 3D 180→OK

4. 定义材料参数

Main Menu：Preprocessor → Material Props → Material Models →

Structural→Linear→Elastic→Isotropic→EX：2.0e11，PRXY：0.3→OK

5. 定义实常数

Main Menu：Preprocessor→Real Constants…→Add…→select Type 1→OK→ AREA：0.0025→OK→Close

6. 生成关键点

Main Menu：Preprocessor→Modeling→Create→Keypoints→In Active CS→依次输入四个点的坐标：input：1（0，0，0）→APPLY→2（1，0，0）→APPLY→3（1，2，0）→APPLY→4（0，2，0）→OK

7. 生成 5 条线

Main Menu：Preprocessor→Modeling→Create→Lines→Straight lines→依次连接 13 两个点；24 两个点；14 两个点；23 两个点；34 两个点→OK

8. 通过布尔 Partition 运算，使所有杆铰链连接

Main Menu：Preprocessor→Modeling→Operate→Booleans→Partition→Lines→Pick All→OK

9. 用 COPY 命令生成一半桁架

Main Menu：Preprocessor→Modeling→Copy→Lines→Pick All→OK→在 DY 框内填 2→OK

10. 用 Reflect 命令生成桁架

Main Menu：Preprocessor→Modeling→Reflect→Lines→Pick All→OK→选默认的 YZ 对称面→OK

11. 用 Overlap 命令黏合桁架中各杆

Main Menu：Preprocessor→Modeling→Operate→Booleans→Overlap→Lines→Pick All→OK

12. 网格划分

Main Menu：Preprocessor→Meshing→Mesh Tool→Mesh：lines→Mesh→Pick All（in Picking Menu）→Close（ the Mesh Tool window）

13. 设定求解参数

Main Menu：Solution→Analysis Type→New analysis→Static→Sol’ n Controls→Analysis Options→Large Displacement→Calculate prestress effects 框内打勾→OK

14. 分别给模型最底层的三个关键点施加 x、y、z 方向的约束

Main Menu：Solution→Define Loads→Apply→Structural→Displacement→On Keypoints→拾取最底层的三个关键点→OK→select Lab2：UX，UY，UZ→填 0 值→OK

15. 给左上角关键点施加 X 方向载荷 1E7（N）

Main Menu：Solution→Define Loads→Apply→Structural→Force/Moment→On Keypoints→拾取左上角关键点→OK→Lab：FX，Value：1e7→OK

16. 分析计算

Main Menu：Solution→Solve→Current LS→OK（to close the solve Current Load Step window）→OK

17. 结果显示

Main Menu：General Postproc→Plot Results→Deformed Shape→select Def + Undeformed→OK（back to Plot Results window）→Contour Plot→Element Solu→select：Stress→1st principal stress→OK

18. 退出系统

7-24 ANSYS 进行线性分布载荷作用下的悬臂梁应力计算

问题描述：一根悬臂梁的横截面为矩形，长度 2m，厚×高 = 单位厚度×0.6m。材料的弹性模量 200GPa，泊松比 0.3。用平面 4 结点实体 182 单元离散，取长度单位：mm，力单位：N，应力单位：MPa，按照平面应变处理。单位厚度上的线性分布载荷如图 7-68 所示。

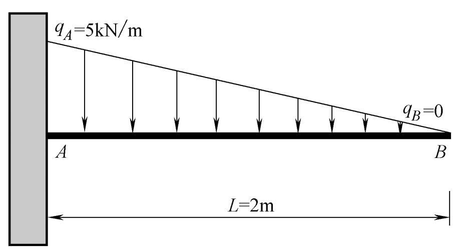


图 7-68 题 7-24 图 悬臂梁分析模型

ANSYS 菜单操作步骤：

1. 指定分析范畴为结构分析。

Main Menu：Preference→选中 Structural→OK

2. 设置文件名

Utility Menu：File→Change Jobname，输入

“Cantilever_ beam”

3. 选择单元类型

Main Menu：Preprocessor→Element Type→Add/Edit/Delete→Add→Solid Quad 4node 182→OK→Options→K3：Plane Strain→OK→Close

4. 定义材料参数

Main Menu：Preprocessor→Material Props→Material Models→Structural→Linear→Elastic→Isotropic→输入：EX：200e3，PRXY：0. 3→OK

5. 生成矩形面

Main Menu：Preprocessor→Modeling→Create→Areas→Rectangle→By 2 Corners→在对话框中输入值，WP X，WP Y 均输入 0，Width 输入 2000，Height 输入 600→OK

6. 设定单元长度为 100

Main Menu：Preprocessor→Meshing→Size Cntrls→ManualSize→Global→Size→将弹出 Global Element Sizes→在对话框中的 Element edge length 对话框中输入 100→OK，完成单元尺寸的设置并关闭对话框。

7. 划分网格

Main Menu：Preprocessor→Meshing→Mesh→Areas→Mapped→将弹出 Mesh Areas 拾取对话框→Pick All

8. 给模型左边施加固定约束

Main Menu：Solution→Define Loads→Apply→Structural→Displacement→On lines→选左边线 →OK→第一行：ALL DOF→第四行 VALUE 选 0：→OK

9. 设置函数参数

Utility Menu：Parameters→Functions→Define/Edit→在下方的下拉列表框（第三框）内选择 X 作为设置的变量；在 Result 窗口中出现 {X}，写入所施加的线性分布载荷函数：5000 * （2000-{X})/2000→单击 File→Save→输入 my_ q（文件扩展名：func）→Close

10. 读入函数参数

Utility Menu：Parameters→Functions→Read from file：将需要的 my_ q. func 文件打开，任给一个参数名 qq→OK

11. 用箭头表示表面分布载荷

Utility Menu：Plotctrls → Symbols → Show pres and convect as → 将表框内的 Face outline 下拉改为 arrows→OK

12. 在梁上边施加线性分布载荷：

Main Menu：Solution→Define Loads→Apply→Structural→Pressure→On Lines→拾取梁的上边线→OK→在下拉列表框中选择：Existing table→Apply→选择需要的载荷参数名 qq→OK

13. 为显示出线性分布载荷箭头，先保存载荷工况文件

Solution→load step opts→write LS File 输入文件名：1（此时或者滚动中间滚轮，可以显示出线性分布载荷，其箭头沿着长度有长短不同）

14. 分析计算

Main Menu：Solution→Solve→Current LS→OK

15. 位移图形显示

Main Menu：General Postproc→Plot Results→Deformed Shape→选择 Def + Undeformed→OK

16. x 方向应力结果显示

Main Menu：General Postproc→Plot Results→Contour Plot→Nodal Solu→Stress→X Component of stress→OK

17. 主应力结果显示

Main Menu：General Postproc→Plot Results→Contour Plot→Nodal Solu→Stress→1st Principal stress→OK

18. 退出系统

Utility Menu：File→Exit→Save Everything→OK

第 8 章

组合变形

内容梗概：解决组合变形强度问题的基本方法是叠加法。应用条件为：材料服从胡克定律小变形，这样保证内力与诸外载荷加载次序无关。使用叠加法时应当将外载荷按基本变形分解为几种基本变形对应的载荷形式。然后根据各基本变形构件的内力分布规律，找到危险面并根据危险面上相应内力分量画出应力分布图，确定危险点。按照危险点的应力状态，采用相应的强度理论进行强度计算。

8.1 组合变形的基本概念

1. 构件的受力变形情况分为基本变形（如轴向拉压、扭转、平面弯曲、剪切）和组合变形。构件在载荷作用下常常同时发生两种或两种以上的基本变形，称为组合变形。实际上，大多数杆件受力变形都是组合变形问题。一般而言，只考虑对问题影响较大的一种或几种基本变形形式，而不可能全面研究各种情况。因此需要对实际问题进行简化，忽略影响较小的因素所引起的应力或位移，转化成容易研究的力学模型，再得到最后结果来指导工程实践。

2. 研究组合变形问题的关键在于如何将组合变形分解为若干基本变形，并将基本变形下的应力和变形进行叠加。对组合变形问题，一般可按照外力简化、内力分析、应力和变形计算的步骤进行研究，然后进行强度和刚度设计。

1）外力简化：将外力简化成几组基本变形形式作用的等效力系。

2）内力分析：分析内力分布规律，结合截面的几何性质和材料的力学特性，确定可能的危险截面（通常指内力最大的截面或者截面积最小的截面）及其内力分量。

3）应力计算：按基本变形形式下横截面上的应力变化规律，确定可能的危险点及其应力分量，并按叠加原理分析该点的应力状态。

4）强度校核：按危险点的应力状态及材料的力学特性，选取适当的强度理论建立强度条件进行强度校核。

注意：利用上述方法进行组合变形分析时应满足以下两个条件：

1）符合圣维南原理，可以用静力等效力系代替原有的荷载，即要求杆件为细长杆，且所求的应力点应远离外力作用位置；

2）要求杆件材料处于线弹性范围内，且杆件变形很小，保证能按构件初始形状或尺寸进行分解与叠加计算，且能保证与加载次序无关。如图 8-1 所示纵横弯曲问题，横截面上内

力（见图 8-2）既有轴力 $F_N = F$，又有弯矩 $M(x) = ql/2 - qx^2/2 + F \cdot v(x)$。可见当挠度（变形）较大时，梁内的弯矩与挠度相关，轴力引起的附加弯矩不能略去。虽然梁是线弹性的，但是弯矩、挠度与 F 的关系却仍为非线性的，因而不能用叠加法。除非梁的刚度较大，挠度很小，轴力引起的附加弯矩可略去。

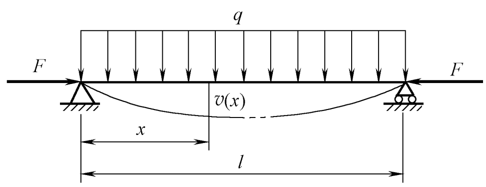


图 8-1　纵横弯曲梁

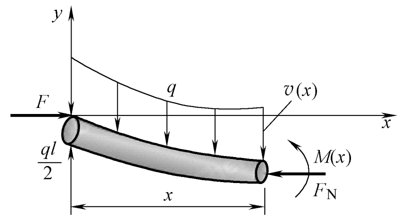


图 8-2　纵横弯曲横截面上的载荷

8.2 拉伸或压缩与弯曲组合

1. 拉伸或压缩与弯曲组合

拉弯组合或压弯组合是指轴向拉压与平面弯曲的组合变形形式。如图 8-3a 所示悬臂杆 AB，在它的自由端 A 作用一与铅直方向成 φ 角的力 F（在纵向对称面 x-y 平面内）。将 F 力分别沿 x 轴和 y 轴分解，可得 $F_x = F\sin\varphi$，$F_y = F\cos\varphi$。F_x 为轴向力，主动对梁引起拉伸变形，如图 8-3b 所示；F_y 为横向力，主动引起梁的平面弯曲，如图 8-3c 所示。

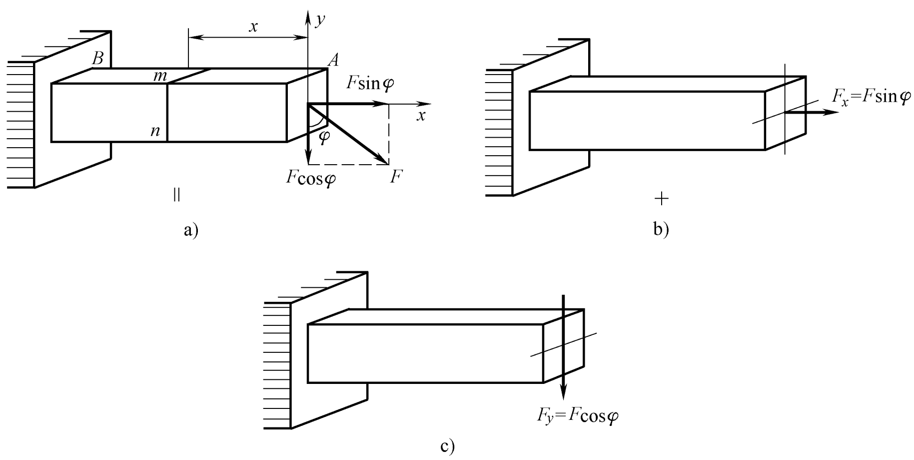


图 8-3　拉（压）与弯曲组合

距 A 端为 x 的截面上的轴力为 $F_N = F_x = F\sin\varphi$，弯矩为 $M_z = -F_y x = -F\cos\varphi \cdot x$。在杆各个横截面上轴力相同，而在横向力 F_y 作用下，固定端横截面上的弯矩最大，$M_{max} = -F\cos\varphi \cdot l$，故危险截面在固定端。

与轴力 F_N 对应的拉伸正应力 σ_T 在该截面上各点处均相等，其值为

$$\sigma_T = \frac{F_N}{A} = \frac{F_x}{A} = \frac{F\sin\varphi}{A}$$

而与 $M_{\max}$对应的最大弯曲正应力 σ_W，出现在该截面的上下边缘处，其绝对值为

$$\sigma_W = \left|\frac{M_{\max}}{W_z}\right| = \frac{Fl\cos\varphi}{W_z}$$

在危险截面上与 F_N、$M_{\max}$对应的正应力沿截面高度变化的情况分别如图 8-4a、b 所示。将弯曲正应力与拉伸正应力叠加后，正应力沿截面高度的变化情况如图 8-4c 所示。

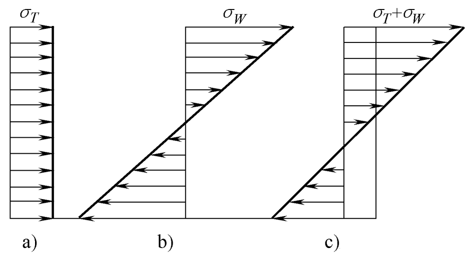


图 8-4　弯曲正应力与拉（压）正应力叠加

若 $\sigma_T>\sigma_W$，则 $\sigma_{\min}$为拉应力；若 $\sigma_T<\sigma_W$，则 $\sigma_{\min}$为压应力。所以 $\sigma_{\min}$的值须视轴向力和横向力分别引起的应力而定。如图 8-4c 所示的应力分布图是在 $\sigma_T<\sigma_W$ 的情况下作出的。显然，杆件的最大正应力是危险截面上边缘各点处的拉应力，其值为

$$\sigma_{\max} = \frac{F\sin\varphi}{A} + \frac{Fl\cos\varphi}{W_z}$$

由于危险点处的应力状态为单轴应力状态，故可将最大拉应力与材料的许用应力相比较，以进行强度计算。

注意，当材料的许用拉应力和许用压应力不相等时，杆内的最大拉应力和最大压应力必须分别满足杆件的拉压强度条件。对于细长杆件，杆件内由于横力弯曲的剪力影响较小，通常可忽略相应的切应力的影响。若杆件的抗弯刚度很小，由横向力所引起的挠度与横截面尺寸相比不能略去，就应考虑轴向力引起的弯矩。

2. 斜弯曲

由图 8-5a 所示构件为一根矩形截面悬臂梁。此梁具有两个对称面（y，z 为对称轴），在端面 B 作用有一个集中力 F。该力通过截面形心并与 y 轴成 φ 夹角。按叠加法求梁内最大弯曲正应力的解法与步骤为：

（1）外力简化：根据圣维南原理，将载荷按基本变形加载条件进行静力等效处理。现将 F 在端面沿对称轴分解为 F_yF_z，则有 $F_y=F\cos\varphi$，$F_z=F\sin\varphi$

（2）内力分析：F_y，F_z 在危险截面（固定端处弯矩最大），分别有绕两个对称轴的弯矩：$M_y=(F\sin\varphi)l$，$M_z=(F\cos\varphi)l$（图 8-5b）。由于横向切应力远小于弯曲应力，故横向剪力 F 的影响忽略不计。此问题简化为两个平面弯曲的组合。

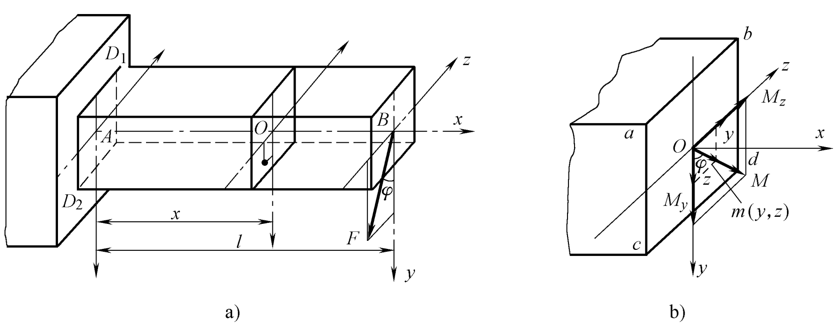


图 8-5　斜弯曲

（3）应力计算：先分别计算两个互相垂直方向平面弯曲的最大应力。

在 M_y 作用下，产生以 y 轴为中性轴的平面弯曲，$\overline{bd}$与$\overline{ac}$边上分别产生最大拉应力与最大压应力

$$\sigma'_{\max}=\pm\frac{M_y}{W_y}=\pm\frac{6Fl\sin\varphi}{b^2h} \tag{a}$$

在 M_z 作用下，产生以 z 轴为中性轴的平面弯曲，$\overline{ab}$与$\overline{cd}$边上分别产生最大拉应力与最大压应力

$$\sigma''_{\max}=\pm\frac{M_z}{W_z}=\pm\frac{6Fl\cos\varphi}{bh^2} \tag{b}$$

其中 W_y和 W_z分别为截面对于 y 和 z 轴的抗弯截面模量。

对于两个平面弯曲的组合，当横截面的周边具有棱角，如矩形、箱形、工字形等截面，其危险点必定在截面的棱角处。因此可求得在 F_y，F_z 共同作用下危险点（D_1D_2 点）的弯曲正应力（同一点同一微面上的正应力代数相加）

$$|\sigma|_{\max}=\frac{M_y}{W_y}+\frac{M_z}{W_z}=\frac{6Fl}{b^2h^2}(h\sin\varphi+b\cos\varphi) \tag{8-1}$$

上述横向载荷 F 构成的两个平面弯曲区别于平面弯曲，称斜弯曲。它有以下两个特点：

1）构件的轴线变形后不再是载荷作用平面内的平面曲线，而是一条空向曲线；

2）横截面内中性轴不再与载荷作用线垂直；或中性轴不再与弯矩矢量重合。图 8-5b 所示截面上任意点 $m(y,z)$ 的正应力为两个平面弯曲的正应力组合，考虑到绕 z 轴的弯矩 M_z 在图示位置点 $m(y,z)$ 产生压应力，则应力叠加式为

$$\sigma=\sigma'+\sigma''=\frac{M_y}{I_y}z-\frac{M_z}{I_z}y \tag{8-2}$$

根据中性轴定义，令 $\sigma=0$，即得中性轴位置表达式

$$\tan\alpha=\frac{y}{z}=\frac{I_zM_y}{I_yM_z}=\frac{I_z}{I_y}\tan\varphi \tag{8-3}$$

当 $I_z\neq I_y$，$\alpha\neq\varphi$ 称为斜弯曲，此时中性轴与 M 矢量不重合（如图 8-6 所示，其中 v、v_y、v_z 分别表示截面上的总挠度、y 方向挠度、z 方向挠度）。对于矩形截面梁（$h>b$），$I_z>I_y$，则 $\alpha>\varphi$，则发生斜弯曲。当 $I_z=I_y$（如圆截面或者正方截面），$\alpha=\varphi$，即载荷通过截面形心任意方向均形成平面弯曲。

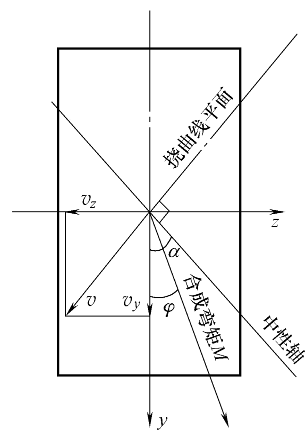


图 8-6　斜弯曲时的挠度与弯矩

对于两个平面弯曲的组合变形，当横截面为圆形或者空心圆时，由于两个平面弯曲的最大应力点并不重叠，危险点无法直接确定。此时，需先确定中性轴的位置，找到危险点后，再计算最大应力。

例 8-1　如图 8-7a 所示，一根长度 $l=1$m，直径 $d=50$mm 的圆截面悬臂梁，在端部 C 作用一个经过轴线且平行 y 轴方向的集中力 $F_y=3$kN，在距离根部为 $a=0.6$m 的位置 B 作用一个经过轴线且平行 z 轴方向的集中力 $F_z=2$kN。求此梁内的最大拉应力和最大压应力。

解：（1）外力分析可知：载荷可以在危险截面上简化为两个平面弯曲的组合并叠加两

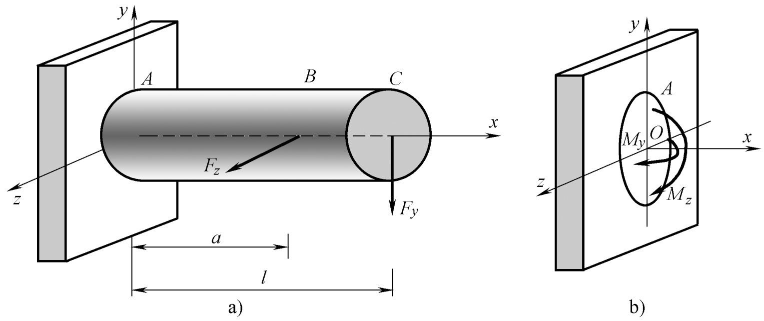


图 8-7　圆截面梁发生双向弯曲

个互相垂直方向的剪切。由于切应力远小于弯曲应力，故剪切影响忽略不计。因此，在图 8-7b 中不再表现剪力 F_y 和 F_z。

（2）内力分析判危险面：在悬臂梁根部产生最大弯矩，因此悬臂梁根部横截面为危险截面。

（3）两个平面弯曲力偶进行向量合成：分别将 F_y 和 F_z 向危险截面的形心 O 点简化，附加作用在 x-z 平面内的弯曲力偶矩 $M_y=F_z\cdot a$ 和作用在 x-y 平面内的弯曲力偶矩 $M_z=F_y\cdot l$。其中，双箭头表示弯曲力偶的向量方向。将两个弯曲力偶进行向量合成，得到合力偶 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_y+\boldsymbol{M}_z$（见图 8-8），其力偶矩为 $M=\sqrt{M_y^2+M_z^2}$。

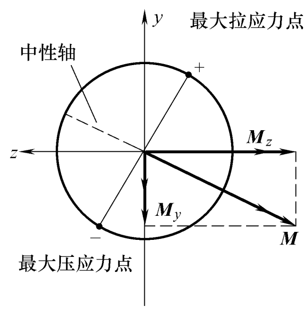


图 8-8　圆截面梁双向弯曲时确定危险点

（4）确定中性轴的位置，找到危险点：如图 8-8 所示，合力偶 $\boldsymbol{M}$ 的向量方向线与中性轴重合，距离中性轴最远点为危险点。由此可以确定梁内的最大拉应力点和最大压应力点，并计算其相应最大应力

$$\sigma^{\mathrm{t}}_{\max}=\sigma^{\mathrm{c}}_{\max}=\frac{M}{W}=\frac{\sqrt{M_y^2+M_z^2}}{W}=\frac{\sqrt{(F_z\cdot a)^2+(F_y\cdot l)^2}}{\pi d^3/16}$$

$$=\frac{\sqrt{(2000\times0.6)^2+3000^2}}{\pi\times0.05^3/16}\mathrm{Pa}=\frac{3231}{24.5\times10^{-6}}\mathrm{Pa}=131.8\times10^6\mathrm{Pa}=131.8\mathrm{MPa}$$

8.3　偏心拉伸或偏心压缩

当构件所受外力作用线与轴线平行但不通过截面形心时就产生偏心压缩或偏心拉伸。图 8-9 所示为偏心压缩问题，按叠加法进行强度校核的步骤为：

1. 在危险截面上简化载荷

设偏心力 F 作用在端面上的 F 点，其坐标为 x_F、y_F（见图 8-9）。此时距端面较远的任意横截面均可以视为危险截面。将力 F 向任意横截面 m 的形心 O 点简化，把原来的偏心力 F 转化为轴向压力 F_{N} 并且附加作用在 x-z 平面内的弯曲力偶矩 $M_y=F\cdot z_F$ 和作用在 x-y 平面

内的弯曲力偶矩 $M_z = F \cdot y_F$（见图 8-10）。其中，双箭头表示弯曲力偶的向量方向。

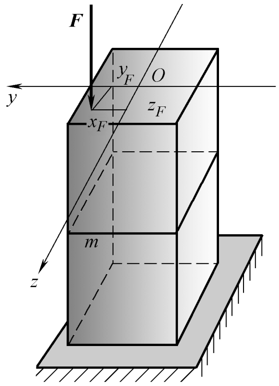


图 8-9　偏心压缩

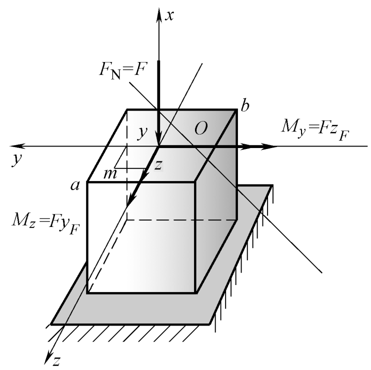


图 8-10　偏心压缩杆横截面内力

在这些载荷作用下，在所有横截面上的内力——轴力和弯矩均保持不变，即

$$F_{\mathrm{N}} = F,\quad M_y = F z_F,\quad M_z = F y_F$$

所以，杆件的变形是轴向压缩和两个互相垂直平面内的纯弯曲组合而成。

2. 在危险点进行应力叠加

在任意横截面 $m(x, y)$ 的正应力为压应力和两个平面弯曲（分别绕 y 和 z 轴）正应力的叠加：

$$\sigma_{\mathrm{m}} = -\frac{F}{A} - \frac{F \cdot z_F \cdot z}{I_y} - \frac{F \cdot y_F \cdot y}{I_z} \tag{8-4}$$

在 a 点有最大压应力 σ_a，在 b 点有最大拉应力 σ_b，且

$$\sigma_a = \sigma_{\max}^{压} = -\frac{F}{A} - \frac{F \cdot z_F}{W_y} - \frac{F \cdot y_F}{W_z} \tag{8-5}$$

$$\sigma_b = \sigma_{\max}^{拉} = -\frac{F}{A} + \frac{F \cdot z_F}{W_y} + \frac{F \cdot y_F}{W_z} \tag{8-6}$$

式中，$W_y = \dfrac{I_y}{z_{\max}}$，$W_z = \dfrac{I_z}{y_{\max}}$

3. 危险点强度校核

对于塑性材料梁，材料的抗拉强度与抗压强度相同，校核公式为

$$\sigma_{\max} = \left| -\frac{F}{A} - \frac{F \cdot z_F}{W_y} - \frac{F \cdot y_F}{W_z} \right| \leqslant [\sigma] \tag{8-7}$$

式中，$[\sigma]$ 为材料的许用应力。对于脆性材料梁，强度校核必须考虑材料的抗拉强度与抗压强度不同，必须分别校核。校核公式为

$$(\sigma_{\mathrm{t}})_{\max} = \left| -\frac{F}{A} + \frac{F \cdot z_F}{W_y} + \frac{F \cdot y_F}{W_z} \right| \leqslant [\sigma_{\mathrm{t}}] \tag{8-8}$$

$$(\sigma_{\mathrm{c}})_{\max} = \left| -\frac{F}{A} - \frac{F \cdot z_F}{W_y} - \frac{F \cdot y_F}{W_z} \right| \leqslant [\sigma_{\mathrm{c}}] \tag{8-9}$$

式中，$[\sigma_{\mathrm{t}}]$ 为材料的许用拉应力；$[\sigma_{\mathrm{c}}]$ 为材料的许用压应力。

偏心拉伸或偏心压缩实际上是轴向拉压与纯弯曲的组合变形形式。一个轴向拉压与一个平面弯曲的组合称为单向偏心，一个轴向拉压与两个平面弯曲的组合称为双向偏心。对于两个平面弯曲的组合，当横截面的周边具有棱角，如矩形、箱形、工字形等截面，其危险点必定在截面的棱角处，可根据式（8-7）或式（8-8）、式（8-9）来校核强度，无须确定中性轴的位置。然而，当横截面为圆形或者空心圆时，由于两个平面弯曲的最大应力点并不重叠，危险点无法直接确定。此时，需先确定中性轴的位置，找到危险点后进行校核强度。

例 8-2　图 8-11 所示钢板的一侧切去深为 40mm 的缺口，受力 $F=128\text{kN}$。试求：（1）横截面 AB 上的最大正应力。（2）若两侧都切去深为 40mm 的缺口，此时最大应力是多少？不计应力集中的影响。

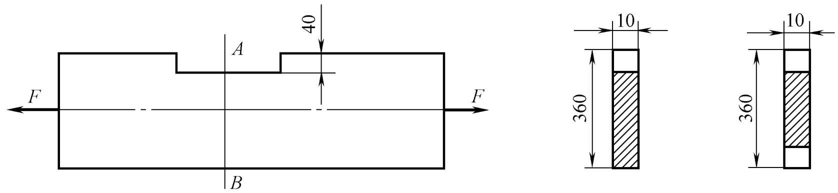


图　8-11

解：（1）求一个缺口处横截面 AB 上的最大正应力

1）外力分析判变形：杆所受外力不过缺口处 AB 截面形心，杆件在缺口处发生拉弯组合变形。

2）内力分析判危险面：杆缺口处各横截面上具有相同的轴力和弯矩。

$$F_N=F=128\text{kN},M=F\delta=128\text{kN}\times\left(\frac{0.360\text{m}}{2}-\frac{0.360\text{m}-0.040\text{m}}{2}\right)=2.56\text{kN}\cdot\text{m}(\curvearrowright)$$

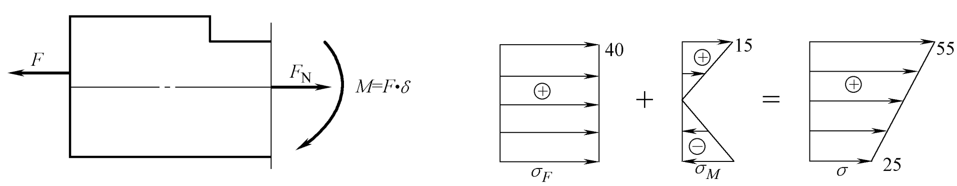


图　8-12

3）应力分析：轴力引起均匀分布的正应力，横截面上还有弯曲正应力。应力分布如图 8-12 所示，最大拉应力出现在缺口处 AB 截面的上边缘。

$$\sigma_{max}=\frac{F_N}{A}+\frac{M}{W_z}=\frac{128\times10^3}{0.320\times0.010}\text{Pa}+\frac{2.56\times10^3}{0.010\times0.320^2/6}\text{Pa}=55\times10^6\text{Pa}=55\text{MPa}$$

（2）两侧有对称缺口时的应力：此时杆将发生轴向拉压变形。

$$\sigma=\frac{F_N}{A}=\frac{128\times10^3}{(360-2\times40)\times10\times10^{-6}}\text{Pa}=45.7\times10^6\text{Pa}=45.7\text{MPa}$$

例 8-3　有一三角形托架如图 8-13a 所示，杆 AB 为一工字钢。已知作用在点 B 处的集中载荷 $F=8\text{kN}$，型钢的许用应力 $[\sigma]=100\text{MPa}$，试选择杆 AB 的工字钢型号。

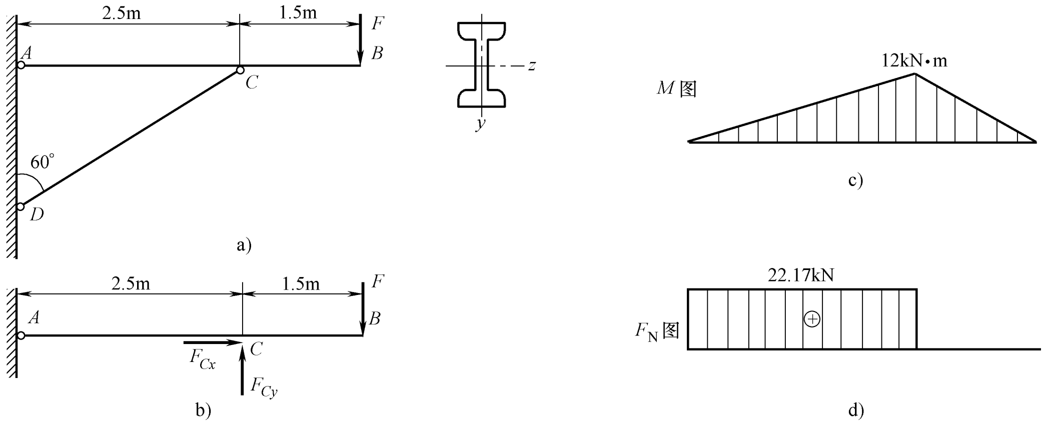


图 8-13

解：（1）计算杆 AB 的内力，并求最大内力值，确定危险截面

杆 AB 的受力图如图 8-13b 所示，由平衡方程得 $F_{Cy}=12.8\text{kN}$，$F_{Cx}=22.17\text{kN}$。做出杆 AB 的弯矩图和轴力图分别如图 8-13c、d 所示。从内力图上可看出危险截面为截面 C。最大弯矩（绝对值）及最大轴力分别为 $M_{\max}=12\text{kN}\cdot\text{m}$，$F_{\text{Nmax}}=22.17\text{kN}$。

（2）正应力强度条件

$$\sigma_{\max}=\frac{F_{\text{Nmax}}}{A}+\frac{M_{\max}}{W_z}\leqslant[\sigma] \tag{a}$$

（3）选择工字钢的型号

因式（a）中的 A 和 W_z 均未知，故需采用试算法，即暂时忽略轴力引起的正应力，先按弯曲强度条件试选工字钢型号，由型钢表可查得相应的 A 和 W_z 后，代入式（a）验算调整。弯曲强度条件为

$$W_z\geqslant\frac{M_{\max}}{[\sigma]}=\frac{12\times10^3}{100\times10^6}\text{m}^3=0.12\times10^{-3}\text{m}^3=120\times10^3\text{mm}^3 \tag{b}$$

由型钢表可选 16 号工字钢，其中 $A=26.1\times10^2\text{mm}^2$，$W_z=141\times10^3\text{mm}^3$，代入式（a）得

$$\sigma=\left(\frac{22.17\times10^3}{26.1\times10^2\times10^{-6}}+\frac{12\times10^3}{141\times10^3\times10^{-9}}\right)\text{Pa}=93.6\text{MPa}<[\sigma]$$

能满足强度条件，确定选用 16 号工字钢。

8.4 扭转与弯曲的组合

如图 8-14 所示一般机械传动轴，大多同时受到扭转力偶和横向力的作用，轴发生扭转与弯曲的组合变形。通过受力分析，将外力和约束力向轴线简化，可以得到扭矩和弯矩的分布规律并绘制相应的内力图。

根据轴的内力分布，通过比较可以确定危险截面（最大应力作用的截面。对于等截面

轴，通常在最大弯矩作用面；对于变截面轴，则需要比较确定)，在此截面上按照总弯矩 M 和扭矩的作用方向，可以分别计算所对应产生的最大正应力和最大切应力，从而可确定圆轴横截面上的危险点位置（最大应力作用点）及其应力状态。由于此时危险点上的正应力和切应力不可以直接叠加，必须根据材料所适用的强度理论进行强度校核。

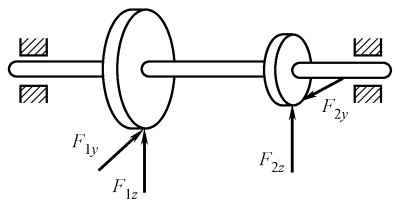


图 8-14　弯-扭组合变形

如图 8-15 所示，一根圆钢轴的直径 $d=200\text{mm}$，在其右边缘 B 中心作用有竖直方向力 F，水平方向力 $2F$ 和力偶 $M_e=F\times a$。已知 $L=5m$，$a=1m$。材料的许用应力 $[\sigma]=120\text{MPa}$。若不计弯曲切应力的影响，试按照第三强度理论确定作用在轴上的载荷 F 的容许值。

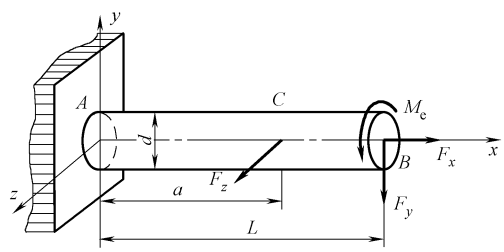


图 8-15　圆截面杆拉-弯-扭组合变形

分析：将圆轴的外力和约束力向轴线简化，可知在根部横截面上分别作用有轴力 F_N、弯矩 M_y 和 M_z、扭矩 T（图 8-16a），采用矢量表现弯矩则如图 8-16b 所示。轴力 F_N 在截面上产生均匀正应力（图 8-17a）。通过圆心（形心）的任意方向的轴均为对称轴，因而合弯曲力偶矩 $M=\sqrt{M_y^2+M_z^2}$，其向量作用线即中性轴。这时由 M 产生的平面弯曲正应力和由扭矩 T 产生的扭转切应力如图 8-17b 所示，计算公式分别为

$$\sigma=\frac{M}{W}=\frac{\sqrt{M_y^2+M_z^2}}{W} \tag{a}$$

$$\tau=\frac{T}{W_T} \tag{b}$$

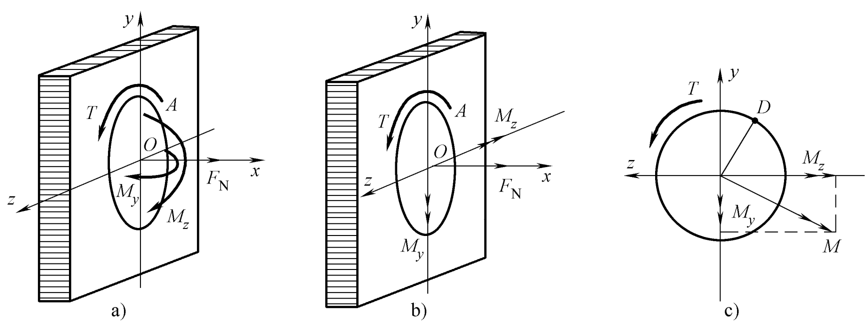


图 8-16　圆截面杆拉-弯-扭时危险截面上的内力

在圆轴的危险截面上，危险点分布在圆截面的外沿，其应力状态如图 8-17c 所示。主应力为

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_3\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2+\tau^2}\,,\sigma_2=0 \tag{c}$$

对塑性材料，选用第三强度理论，其强度条件为

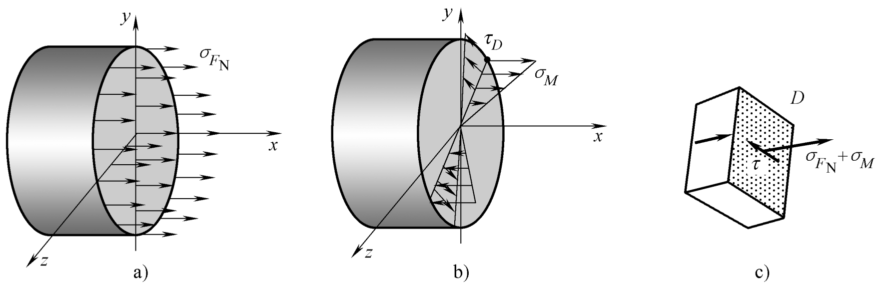


图 8-17 圆截面杆拉-弯-扭时危险截面上的危险点及其应力

a）横截面上 M_y 与 M_z、向量合成 b）横截面上作用 T c）危险点应力状态

$$\sigma_1-\sigma_3=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\leqslant[\sigma] \tag{d}$$

或者选用第四强度理论，其强度条件为

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}\leqslant[\sigma] \tag{e}$$

对直径为 d 的圆截面杆，$W_T=\dfrac{\pi d^3}{16}$和 $W=\dfrac{\pi d^3}{32}$。所以有 $W_T=2W$。由于此圆轴的横截面上没有轴力，考虑式（a）、式（b）、式（c）与式（d）后，基于第三强度理论的强度条件可以简化为

$$\frac{1}{W}\sqrt{M^2+T^2}\leqslant[\sigma]$$

基于第四强度理论，强度条件则简化为

$$\frac{1}{W}\sqrt{M^2+0.75T^2}\leqslant[\sigma]$$

例 8-4 齿轮轴 AB 如图 8-18a 所示。已知轴的转速 $n=265\text{rpm}$，输入功率 $P=10\text{kW}$，两齿轮节圆直径 $D_1=396\text{mm}$，$D_2=168\text{mm}$，压力角 $\alpha=20°$，轴的直径 $d=50\text{mm}$，材料为 45 号钢，许用应力 $[\sigma]=50\text{MPa}$。试校核轴的强度。

解：(1) 轴的外力分析：将啮合力分解为切向力与径向力，并向齿轮中心（轴线上）平移。考虑轴承约束力后得轴的受力图如图 8-18b 所示。由 $\sum M_x(F)=0$ 得

$$T_C=T_D=9550\frac{P}{n}=9550\frac{10}{265}\text{N}\cdot\text{m}=361\text{N}\cdot\text{m}$$

由扭转力偶计算相应切向力，径向力

$$T_C=F_{1z}\frac{D_1}{2},F_{1z}=\frac{2T_C}{D_1}=\frac{2\times361}{0.396}\text{N}=1823\text{N},F_{1y}=F_{1z}\tan20°=1823\times0.364\text{N}=664\text{N}$$

$$T_D=F_{2y}\frac{D_2}{2},F_{2y}=\frac{2T_D}{D_2}=\frac{2\times361}{0.168}\text{N}=4300\text{N},F_{2z}=F_{2y}\tan20°=4300\times0.364\text{N}=1565\text{N}$$

轴上铅垂面内的作用力 $F_{1y}F_{2y}$，约束力 F_{Ay}、F_{By}构成铅垂面内的平面弯曲。

由平衡条件：

$$\sum M_{z,B}(F)=0$$

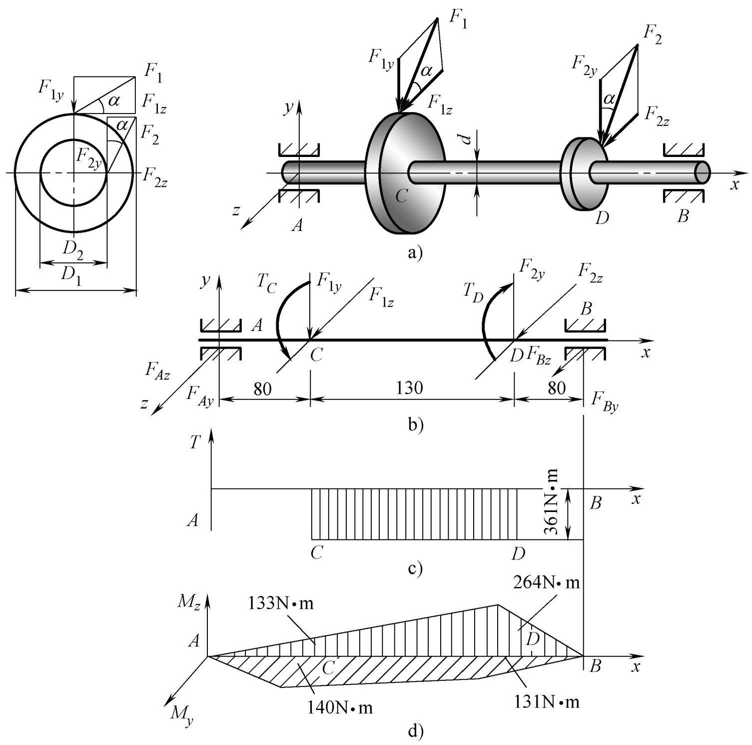


图　8-18

$$\sum M_{z,A}(F)=0$$

可求得 $F_{Ay}=1664\text{N}$，$F_{By}=3300\text{N}$

约束力 F_{Az}、F_{Bz} 构成水平面内的平面弯曲，由平衡条件

$$\sum M_{y,B}(F)=0$$

$$\sum M_{y,A}(F)=0$$

可求得 $F_{Az}=1750\text{N}$，$F_{Bz}=1638\text{N}$

（2）作内力图：分别作轴的扭矩图 T 图（图 8-18c），铅垂面内外力引起的轴的弯矩 M_z 图，水平面外力引起的轴的弯矩 M_y 图（图 8-18d）

（3）作强度校核：由弯矩图及扭矩图确定可能危险面为 C（右）面和 D（左）面。比较 $M=\sqrt{M_y^2+M_z^2}$ 可知 D 面更危险。

$$M_C=\sqrt{140^2+133^2}\ \text{N}\cdot\text{m}=193\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_D=\sqrt{131^2+264^2}\ \text{N}\cdot\text{m}=294\text{N}\cdot\text{m}$$

对塑性材料，应采用第三强度理论进行强度校核

$$\frac{1}{W}\sqrt{M_D^2+T^2}=\frac{\sqrt{294^2+361^2}}{0.1\times0.05^3}\text{Pa}=37.4\times10^6\text{Pa}=37.4\text{MPa}<[\sigma]=55\text{MPa}$$

本章小结

1. 本章处理组合变形构件的强度和变形问题，以强度问题为主。

2. 按照圣维南原理和叠加原理可以将组合变形问题分解为两种以上的基本变形问题来处理。

3. 根据叠加原理，可以运用叠加法来处理组合变形问题的条件是：①线弹性材料，加载在弹性范围内，即服从胡克定律；②小变形，保证内力、变形等与诸外载荷加载次序无关。叠加法的主要步骤为：

1）将组合变形按基本变形的加载条件或相应内力分量分解为几种基本变形。

2）根据各基本变形情况下的内力分布，确定可能危险面；根据危险面上相应内力分量画出应力分布图，由此找出可能的危险点；根据叠加原理，得出危险点应力状态。

3）根据构件的材料选取强度理论，由危险点的应力状态，写出构件在组合变形情况下的强度条件，进而进行强度计算。

4. 典型的组合变形问题

1）两个互相垂直平面内的平面弯曲问题的组合。像矩形截面这样 $I_y \neq I_z$ 的情况，则组合变形为斜弯曲。此时中性轴不再与加载轴垂直，并且挠度曲线不再为加载面内的平面曲线，对其危险点（角点）可以写出强度条件 $\sigma_{\max}=\frac{M_y}{W_y}+\frac{M_z}{W_z}\leqslant[\sigma]$。若截面像圆形这样 $I_y=I_z$，则组合变形仍为平面弯曲，对其危险点可以写出强度条件 $\sigma_{\max}=\frac{M}{W}=\frac{1}{W}\sqrt{M_y^2+M_z^2}\leqslant[\sigma]$。

2）拉伸（或压缩）与弯曲的组合。此时的弯曲可以是一个平面内的平面弯曲，也可以是两个平面内的平面弯曲组合成斜弯曲，与拉伸（或压缩）组合以后危险点的应力状态仍为单向应力状态，因此只是在写危险点 $\sigma_{\max}$ 时，在(1)的基础上再叠加上拉伸（或压缩）应力。此类问题的特点是中性轴不再通过截面形心。对像混凝土这类抗拉强度大大低于抗压强度的脆性材料制成的偏心压缩构件（如短柱），强度设计时往往考虑截面核心问题。

3）弯曲与扭转的组合。工程上常见的有圆轴和曲柄轴（带有矩形截面的曲柄和圆形截面的轴颈）。此时的弯曲对圆形截面为平面弯曲（可以是一个平面内弯曲，也可以是两个平面内弯曲组成的平面弯曲），对矩形截面为斜弯曲；此时的扭转可以是圆轴扭转也可以是矩形截面扭转。因为受力较复杂，分析危险面应画出弯矩图与扭矩图，分析危险点应画出相应的应力分布图。写强度条件应根据材料和危险点应力状态。对于圆轴，最后的强度条件可以按危险面上的内力分量写出，如对钢材，按第三强度理论

$$\frac{\sqrt{M_y^2+M_z^2+M_x^2}}{W}\leqslant[\sigma]$$

按第四强度理论

$$\frac{\sqrt{M_y^2+M_z^2+0.75M_x^2}}{W}\leqslant[\sigma]$$

而对矩形截面的曲柄，则必须按危险点所具有的不同的应力状态分别写出，而不能直接用上

面的形式（为什么?）。另外应注意，遇到弯+扭+拉（或压）的情况，危险点和相应的强度条件会有何变化?

思　考　题

8-1　如何判断构件的变形类型？试分析图 8-19 所示杆件各段杆的变形类型。

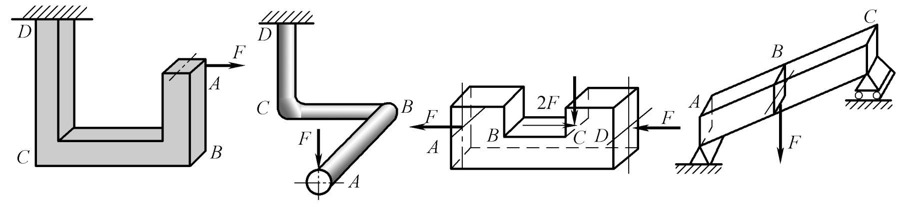


图 8-19　思考题 8-1 图

8-2　悬臂梁受力如图 8-20a 所示，已知水平载荷 $F_1=800\text{N}$，铅垂载荷 $F_2=1650\text{N}$，$l=1\text{m}$，指出此危险点位置。当截面为（1）矩形，$b=90\text{mm}$，$h=180\text{mm}$（见图 8-20b）；（2）圆形，$d=130\text{mm}$（见图 8-21c）；（3）正方形 $a=120\text{mm}$（见图 8-20d）。

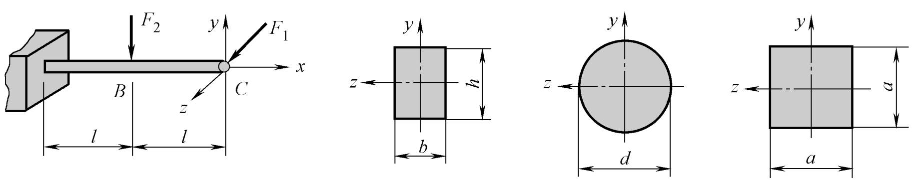


图 8-20　思考题 8-2 图

8-3　请说明在什么情况下可采用下列强度条件进行强度计算，并指出各项符号的含义。（1）$\sigma_1-\sigma_3\leqslant[\sigma]$；（2）$\dfrac{1}{W}\sqrt{M^2+T^2}\leqslant[\sigma]$；（3）$\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\leqslant[\sigma]$。

8-4　如何区分平面弯曲与斜弯曲问题?

8-5　两个平面弯曲的组合可以组成新的平面弯曲（如圆形截面、方形截面），也可以组成斜弯曲。这两种不同性质的弯曲，在寻找危险点和计算危险点应力时有什么不同的方法?

8-6　曲拐受力如图 8-21 所示，危险截面在哪里？应当怎么样校核强度?

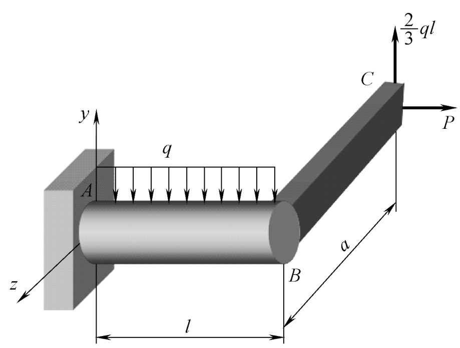


图 8-21　思考题 8-6 图

习题

8-1　图 8-22 所示起重架的最大起吊重量（包括行走小车等）为 $P=40\text{kN}$，横梁 AC 由两根 18 槽钢组成，材料为 Q235 钢，许用应力 $[\sigma]=120\text{MPa}$。试校核梁的强度。

8-2　人字架及承受的载荷如图 8-23 所示。试求截面 Ⅰ—Ⅰ 上的最大正应力和 A 点的正应力。

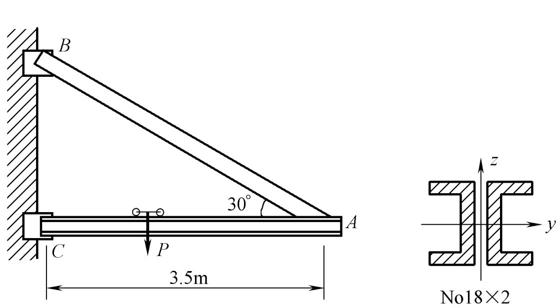


图 8-22　题 8-1 图

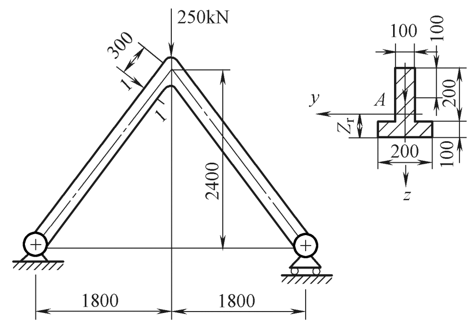


图 8-23　题 8-2 图

8-3　简易承重支架如图 8-24 所示，横梁 AB 为工字钢梁，许用应力 $[\sigma]=100\text{MPa}$。若 $F=8\text{kN}$，试选择工字钢的型号。

8-4　如图 8-25 所示，斜杆 AB 的横截面为 100mm×100mm 的正方形，若 $F=3\text{kN}$，试求其最大拉应力和最大压应力。

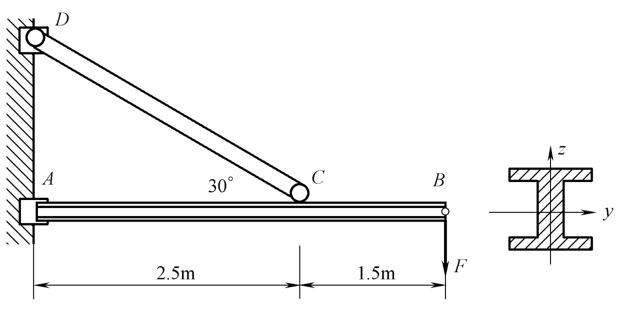


图 8-24　题 8-3 图

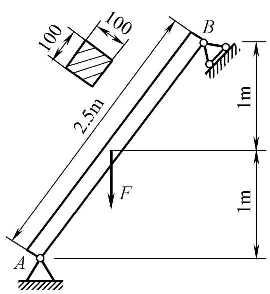


图 8-25　题 8-4 图

8-5　如图 8-26 所示，砖砌烟囱高 $H=30\text{m}$，底截面 Ⅰ—Ⅰ 的外径 $d_1=3\text{m}$，内径 $d_2=2\text{m}$，自重 $G_1=2000\text{kN}$，受 $q=1\text{kN/m}$ 的风力作用。试求：

（1）烟囱底截面上的最大压应力。

（2）若烟囱的基础埋深 $h=4\text{m}$，基础及填土自重按 $G_2=1000\text{kN}$ 计算，土壤的许用压应力 $[\sigma]=0.3\text{MPa}$，圆形基础的直径 D 应为多大？

注：计算风力时，可省去烟囱直径的变化，把它看作是等截面的。

8-6　图 8-27 所示一矩形截面杆，用应变片测得杆件上、下表面的轴向应变分别为 $\varepsilon_a=1\times8^{-3}$，$\varepsilon_b=0.4\times8^{-3}$，材料的弹性模量 $E=210\text{GPa}$。试绘制横截面的正应力分布图；并求拉力 F 及其偏心距 e 的数值。

8-7　一矩形截面短柱，受图 8-28 所示偏心压力 F 作用，已知许用拉应力 $[\sigma_t]=30\text{MPa}$，许用压应力 $[\sigma_c]=90\text{MPa}$，求许可压力 $[F]$。

8-8　单臂液压机架及其立柱的横截面尺寸如图 8-29 所示，长度单位为 mm，截面面积 $A=99448\text{mm}^2$，

截面对于中性轴的惯性矩 $I_z=2.9\times10^{10}\mathrm{mm}^4$。$F=1600\mathrm{kN}$，材料的许用应力 $[\sigma]=160\mathrm{MPa}$。试校核立柱的强度。

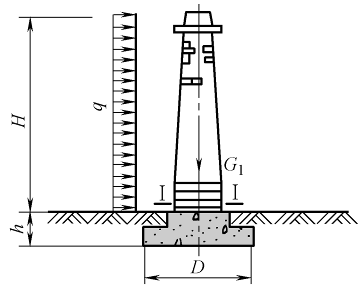


图 8-26 题 8-5 图

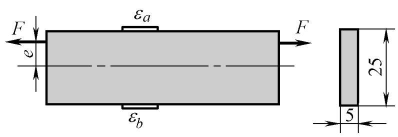


图 8-27 题 8-6 图

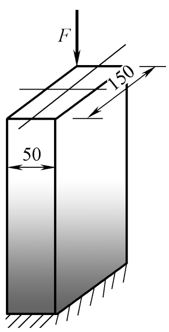


图 8-28 题 8-7 图

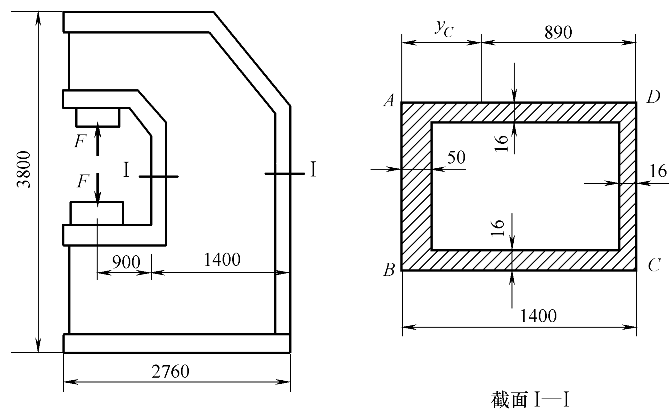


图 8-29 题 8-8 图

8-9 一手摇绞车如图 8-30 所示。已知轴的直径 $d=25\mathrm{mm}$，材料为 Q235 钢，其许用应力 $[\sigma]=80\mathrm{MPa}$。试按第四强度理论求绞车的最大起吊重量 W。

8-10 一轴上装有两个圆轮如图 8-31 所示，F_1、F_2 两力分别作用于两轮上并处于平衡状态。圆轴直径 $d=110\mathrm{mm}$，$[\sigma]=60\mathrm{MPa}$，试按第三强度理论确定许用载荷。

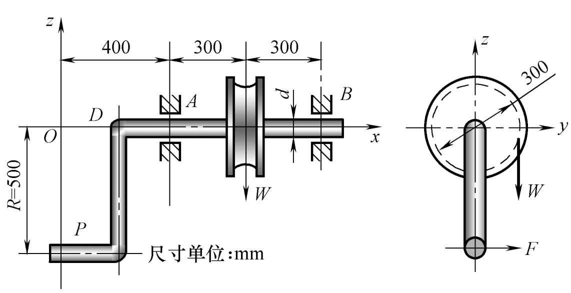


图 8-30 题 8-9 图

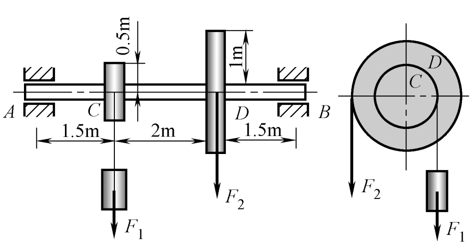


图 8-31 题 8-10 图

8-11 直升机转动轴如图 8-32 所示。已知飞机自重 $P=125\mathrm{kN}$，发动机提供扭矩 $M=2.4\mathrm{kN\cdot m}$，轴的直径 50mm，材料的许用应力 $[\sigma]=100\mathrm{MPa}$。试用第三强度理论校核强度。

8-12 图 8-33 所示带轮传动轴，传递功率 $P=7\mathrm{kW}$，转速 $n=200\mathrm{r/min}$。带轮重量 $G=1.8\mathrm{kN}$。左端齿轮上啮合力 F_n 与齿轮节圆切线的夹角（压力角）为 20°。轴的材料为 A5，其许用应力 $[\sigma]=80\mathrm{MPa}$。试分别在忽略和考虑带轮重量的两种情况下，按第三强度理论估算轴的直径。

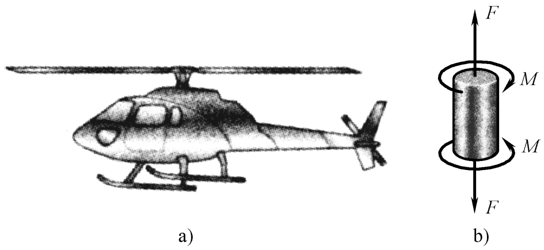


图 8-32　题 8-11 图

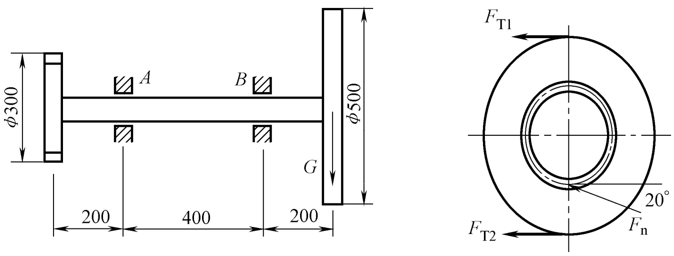


图 8-33　题 8-12 图

第 9 章
压杆稳定

内容梗概：当细长杆件所受的压力 F 达到或超过临界压力 F_{cr} 时，就要丧失原有直线形态下的平衡而发生压杆失稳或屈曲。计算临界压力 F_{cr} 时，需要先确定压杆的柔度 $\lambda=\mu l/i$ 和惯性半径 $i=\sqrt{I/A}$。根据 λ 的大小，可将压杆分为三类：①大柔度杆，此时压杆发生线弹性屈曲。②中柔度杆，此时压杆发生非线性屈曲。③小柔度杆，此时压杆发生压缩屈服失效而没有屈曲。对于不同类型压杆，应该采用不同的公式计算压杆临界压力。压杆的稳定条件通常采用两种表示：①安全因数法；②稳定安全因数法。提高压杆承载能力的措施主要有以下几个方面：①减小压杆的长度或在压杆中间增加支撑；②增强杆端约束；③若压杆各个方向的约束条件相同，为了提高临界压力 F_{cr}，应使截面形心主轴惯性矩尽可能大，并且使 $I_y=I_z$。若各个方向的约束条件不同（如柱形铰），则应使 $\lambda_y=\lambda_z$。

9.1 压杆稳定的概念

构件除了强度、刚度失效外，还可能发生稳定失效。例如，受轴向压力的细长杆，当压力超过一定数值时，压杆会由原来的直线平衡形式突然变弯（见图 9-1a），致使结构丧失承载能力。又如，当我们脚踏上一个空的易拉罐，罐将被踩瘪。从力学的观点看，易拉罐由原始圆薄壳对称的平衡形式而突然变为非圆对称的平衡形式（见图 9-1b）。上述各种关于平衡形式的突然变化，统称为稳定失效，简称为失稳或屈曲。工程中的柱、桁架结构中的压杆、薄壳结构及薄壁容器等，在有沉重压力存在时，都可能发生失稳（见图 9-2）。

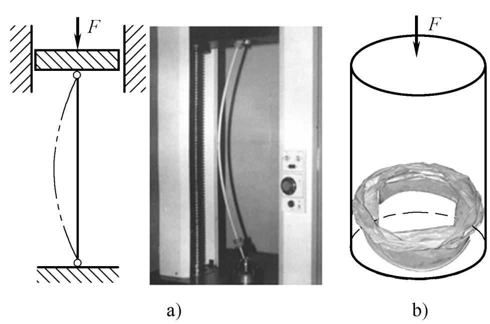


图 9-1　杆件和圆薄壳受到压力发生失稳

由于构件的失稳往往是突然发生的，因而其危害性也较大。历史上曾多次发生因构件失稳而引起的重大事故。近代这类事故时有发生。因此，稳定问题在工程设计中占有重要地位。

“稳定”和“不稳定”是指物体的平衡性质而言。例如，图 9-3a 所示处于凹面的球体，其平稳是稳定的，当球受到微小干扰，偏离其平衡位置后，经过几次摆动，它会重新回到原来的平衡位置。图 9-3b 所示处于凸面的球体，当球受到微小干扰，它将偏离其平衡位置，



图 9-2　由柱组成的压杆结构发生失稳

而不再恢复原位，故该球的平衡是不稳定的。

受压直杆同样存在类似的平衡性质问题。例如，图 9-4a 所示下端固定、上端自由的中心受压直杆，当压力 F 小于某一临界值 F_{cr}时，杆件的直线平衡形式是稳定的。此时，杆件若受到某种微小干扰，它将偏离直线平衡位置，产生微弯如图 9-4b 所示；当干扰撤除后，杆件又回到原来的直线平衡位置，如图 9-4c 所示。但当压力 F 超过临界值 F_{cr}时，撤除干扰后，杆件不再回到直线平衡位置，而在弯曲形式下保持平衡（见图 9-4d），这表明原有的直线平衡形式是不稳定的。使中心受压直杆的直线平衡形式，由稳定平衡转变为不稳定平衡时所受的轴向压力，称为临界载荷，或简称为临界压力，用 F_{cr}表示。

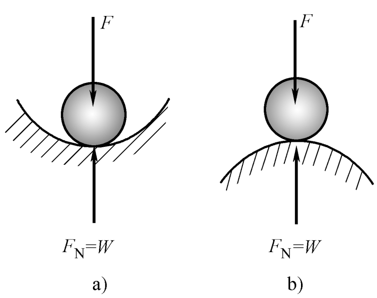


图 9-3　稳定平衡与不稳定平衡

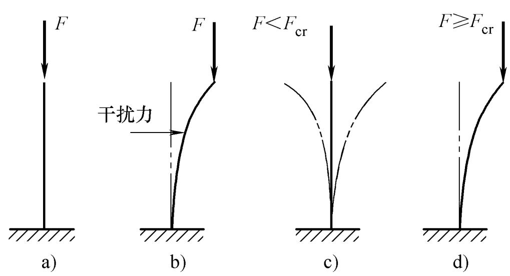


图 9-4　压杆的平衡形式与临界力的关系

为了保证压杆安全可靠的工作，必须使压杆处于直线平衡形式，因而压杆是以临界压力作为其极限承载能力。可见，临界压力的确定是非常重要的。

9.2　细长压杆的临界压力

根据压杆失稳是由直线平衡形式转变为弯曲平衡形式的这一重要概念，可以预料，凡是影响弯曲变形的因素，如截面的抗弯刚度 EI、杆件长度 l 和两端的约束情况，都会影响压杆的临界压力。确定临界压力的方法有静力法、能量法等。本节采用静力法，以两端铰支的中心受压直杆为例，说明确定临界压力的基本方法。

1. 两端铰支压杆的临界压力

两端铰支中心受压的直杆如图 9-5a 所示。设压杆处于临界状态，并具有微弯的平衡形式，如图 9-5b 所示。建立 v-x 坐标系，任意截面 x 处的内力，如图 9-5c 所示为

$$F_N = F(\text{压力}), M = Fv$$

在图示坐标系中，根据小挠度近似微分方程 $\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$，得到

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{F}{EI}v$$

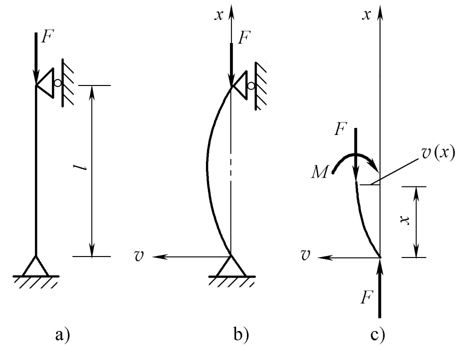


图 9-5　两端铰支压杆的失稳

令

$$k^2 = \frac{F}{EI} \tag{a}$$

得微分方程

$$\frac{d^2v}{dx^2} + k^2 v = 0 \tag{b}$$

由高等数学知识，此微分方程的通解为

$$v = A\sin kx + B\cos kx \tag{c}$$

利用杆端的约束条件，$x=0$，$v=0$，得 $B=0$，可知压杆的微弯挠曲线为正弦函数：

$$v = A\sin kx \tag{d}$$

利用约束条件，$x=l$，$v=0$，得

$$A\sin kl = 0 \tag{e}$$

如果 $A=0$，即压杆没有弯曲变形，不符合讨论要求。因此必须 $kl = n\pi$，$n=1$，2，…，即

$$k = \frac{n\pi}{l} \tag{f}$$

将式（f）代入式（a）可得出相应于临界状态的临界压力表达式

$$F_{cr} = \frac{n^2\pi^2 EI}{l^2} \tag{9-1}$$

这就是细长压杆的欧拉公式。其中 n 为半波数。由此可见，使压杆曲线保持平衡时，压力将出现多值。

2. 关于 $F_{cr} = \frac{n^2\pi^2 EI}{l^2}$ 的讨论

将式（f）代入式（d）可得出挠曲线解

$$v = A\sin\frac{n\pi x}{l}$$

由于 A 并不确定，这里仅讨论挠曲线的形状。

当半波数 $n=1$ 时，挠曲线的形状对应于一个半波正弦曲线（见图 9-6a）

$$v = A\sin\frac{\pi x}{l}$$

当半波数 $n=2$ 时，挠曲线的形状对应于两个半波正弦曲线（见图 9-6b）

$$v=A\sin\frac{2\pi x}{l}$$

当半波数 $n=3$ 时，挠曲线的形状对应于三个半波正弦曲线（见图 9-6c）

$$v=A\sin\frac{3\pi x}{l}$$

依次类推，在高阶临界压力下，压杆挠曲线的形状变成整数个半波正弦曲线。这只有对杆施加相应个数的中间约束时，才能真正实现。

实际工程中有意义的是最小的临界压力值。对于两端铰支约束，使压杆保持微弯平衡时的最小压力取 $n=1$，则临界压力为

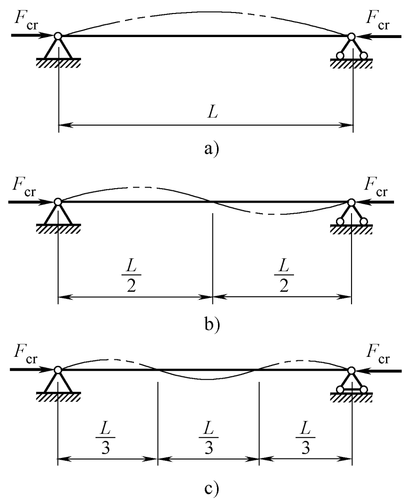


图 9-6 三个半波数对应的挠曲线

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{9-2}$$

此为计算两端铰支细长压杆临界压力表达式。此式表明，F_{cr}与抗弯刚度 EI 成正比，与杆长的平方 l^2 成反比。压杆失稳时，总是绕杆横截面上抗弯刚度最小的轴发生弯曲变形。因此，对于各个方向约束相同的情形（例如球铰约束），式（9-2）中的 I 应取截面最小的形心主轴惯性矩。

在上述分析中，v_{max}的值不能确定，其与 F 的关系曲线如图 9-7 中的水平线 AA'所示，这是由于采用挠曲线近似微分方程求解造成的；如采用挠曲线的精确微分方程，则得 F-v_{max} 曲线如图 9-7 中 A、C 所示。这种 F-v_{max}曲线称为压杆的平衡路径，它清楚显示了压杆的稳定性及失稳后的特性。可以看出，当 $F<F_{cr}$时，压杆只有一条平衡路径 OA，它对应着直线平衡形式。当 $F\geqslant F_{cr}$时，其平衡路径出现两个分支（AB 和 AC），其中一个分支（AB）对应着直线平衡形式，另一个分支（AC）对应着弯曲平衡形式。前者是不稳定的，后者是稳定的。如 AB 路径中的 D 点一经干扰将达到 AC 路径上同一 F 值的 E 点，处于弯曲平衡形式，而且该位置的平衡是稳定的。平衡路径出现分支处的 F 值即为临界压力 F_{cr}，故这种失稳称为分支点失稳。分支点失稳发生在理想受压直杆的情况。

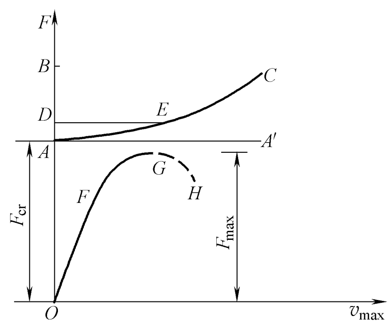


图 9-7 压杆的 F-v_{max}关系曲线

对实际使用的压杆而言，轴线的初曲率、压力的偏心、材料的缺陷和不均匀等因素总是存在的，为非理想受压直杆。对其进行实验或理论分析所得平衡路径如图 9-7 中的 $OFGH$ 曲线，无平衡路径分支现象，一经受压（无论压力多小）即处于弯曲平衡形式，但也有稳定与不稳定之分。当压力 $F<F_{max}$，处于路径 OFG 段上的任一点，如施加使其弯曲变形微增的干扰，然后撤除，仍能恢复原状（当处于弹性变形范围），或虽不能完全恢复原状（如已发生塑性变形）但仍能在原有压力下处于平衡状态，这说明原平衡状态是稳定的。而下降路

径 GH 段上任一点的平衡是不稳定的，因一旦施加使其弯曲变形微增的干扰，压杆将不能维持平衡而被压溃。压力 F_{max} 称为失稳极值压力，它比理想受压直杆的临界压力 F_{cr} 小，且随压杆的缺陷（初曲率、压力偏心等）的减小而逐渐接近 P_{cr}。因 P_{cr} 的计算比较简单，它对非理想受压直杆的稳定计算有重要指导意义，故本书的分析是以理想受压直杆为主。

3. 其他约束情况压杆的临界压力

工程中的压杆，两端会有各种不同的约束。从上述推导临界压力的过程可看出，约束条件不同，压杆的临界压力也不同，即杆端约束对临界压力有影响。在其他约束情况下，可用上述求解微分方程的方法求临界压力，也可用如下类比的方法简捷地求出临界压力。图 9-8a 所示是一端固定、一端自由长为 l 的压杆。根据约束，失稳后挠曲线形状如图 9-8b 中曲线 AB。将失稳后的挠曲线 AB 以固定端 B 为对称点向下延长至 A'。延长后的挠曲线 AA' 是一条半波正弦曲线，与两端铰支压杆失稳后的挠曲线形状一样。这样就比拟得到，一端固定、一端自由长为 l 的压杆的临界压力与两端铰支长为 $2l$ 压杆的临界压力相同。即

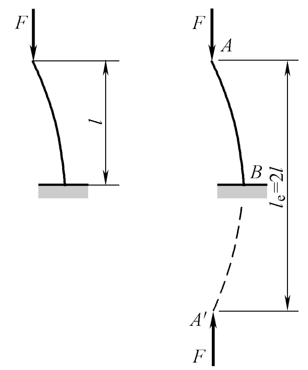


图 9-8　一端自由，一端固定压杆失稳后的挠曲线

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$$

用这种比较失稳后挠曲线形状的方法，可以得到其他约束情况下压杆的临界压力公式。通过确定失稳后挠曲线的拐点，则拐点–拐点或拐点–铰链之间的距离就是等效为两端铰链约束压杆的等效长度，这些公式可统一写成

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \tag{9-3}$$

式（9-2）称为压杆临界压力欧拉公式的一般形式。由式（9-3）可见，杆端约束对临界压力的影响表现在因数 μ 上。称 μ 为长度因数；μl 为压杆的相当长度，表示长为 l 的压杆折算成两端铰支杆后的长度。几种常见约束情况下的长度因数 μ 列于表 9-1 中。

表 9-1　压杆的长度因数

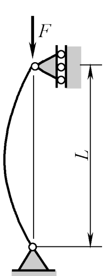
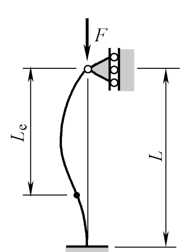
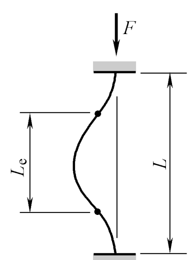
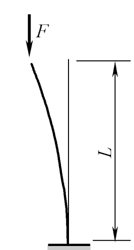
杆端约束情况	两端铰支	一端固定 一端铰支	两端固定	一端固定 一端自由
失稳后挠曲线形状				
长度因数	$\mu=1$	$\mu=0.7$	$\mu=0.5$	$\mu=2$

表 9-1 中所列的只是几种较典型情况，实际中的压杆约束情况可能更复杂。对于那些复杂约束的长度因数可从有关设计手册或规范中查找。

9.3 临界应力、经验公式和临界应力总图

1. 柔度和临界应力

如上节推导欧拉公式所述，临界压力的计算公式（9-3）只有在线弹性范围内才是适用的。为了判断压杆失稳时是否处于线弹性范围以及超出此范围后应该如何计算临界压力，必须引入柔度和临界应力的概念。

压杆的柔度定义为

$$\lambda=\frac{\mu l}{i} \tag{9-4}$$

式中，$i=\sqrt{\frac{I}{A}}$为截面的惯性半径。考虑到在横截面上，绕两根主惯性轴的惯性矩一般不相等，所以截面的惯性半径具有不同的数值，即

$$i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}} \tag{9-5a}$$

和

$$i_z=\sqrt{\frac{I_z}{A}} \tag{9-5b}$$

柔度 λ 又称为压杆的长细比，它全面地反映了压杆长度、约束条件、截面尺寸和形状对临界压力的影响。压杆在临界压力 F_{cr}作用下，其在直线平衡位置时横截面上的应力称为临界应力，用 σ_{cr}表示。压杆在弹性范围内失稳时，则临界应力为

$$\sigma_{cr}=\frac{F_{cr}}{A}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 A}=\frac{\pi^2 Ei^2}{(\mu l)^2}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{9-6}$$

称为欧拉临界应力公式。其中 A 为截面面积。由式（9-6）知，当截面面积一定时，柔度 λ 越大，临界应力 σ_{cr}越小，压杆越容易失稳。因此在线弹性范围内，当长度因数 μ 不变时，式（9-6）中 I 应当取截面的最小形心主轴惯性矩。如果约束在两个相互垂直方向具有不同形式（如带夹板的柱形铰，压杆在一平面内失稳时，约束简化为铰链。在另一垂直平面内失稳时，约束简化为固定端），则长度因数 μ 在不同方向取不同的数值。此时，在式（9-6）中柔度 λ 应当取最大值。即分别取式（9-5a）和式（9-5b）中不同的惯性半径值并乘以与约束对应的长度因数 μ，经过比较取得最大柔度值。

2. 欧拉公式的适用范围

欧拉公式只有在线弹性范围内才适用，当临界应力小于或等于材料的比例极限 σ_p 时，即

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}\leqslant\sigma_p$$

压杆发生弹性失稳。若令

$$\lambda_p=\sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} \tag{9-7}$$

则 $\lambda \geqslant \lambda_p$ 时，压杆发生弹性失稳。这类压杆又称为大柔度杆，在几何形状上就是所谓细长压杆。根据式（9-7）可以计算不同材料制成的压杆的 λ_p 值。应当注意对于碳钢，其弹性模量大约为 $E=200\text{GPa}$，比例极限近似为 $\sigma_p=200\text{MPa}$，用式（9-8）可算得 $\lambda_p\approx100$。

3. 临界应力总图

当临界应力大于材料的比例极限 σ_p 时，对应于 $\lambda<\lambda_p$。实践证明并非所有受压杆件都会发生失稳。短粗的杆件受压后，脆性材料（如铸铁压缩试件）会断裂，而塑性材料（如碳钢压缩试件）会产生塑性变形。因此，这类压杆将发生强度失效，而不是失稳。称为小柔度杆，几何上属于短粗杆。此时横截面上的应力 $\sigma_{cr}=\sigma_s$，而杆的柔度小于材料屈服对应的临界柔度，即 $\lambda<\lambda_s$。其中 λ_s 通过试验确定。

另一方面，当临界应力大于材料的比例极限 σ_p 时，如果压杆发生失稳，则属于弹塑性稳定问题。这类杆又称中柔度杆，几何上属于中长杆。

依据上述三类压杆临界应力 σ_{cr} 与 λ 的关系，可画出 σ_{cr}-λ 曲线如图 9-9 所示。该图称为压杆的临界应力总图。在图中，按照压杆的柔度 λ 所处的范围，可以把压杆分为三类，分别使用不同的公式计算临界压力。

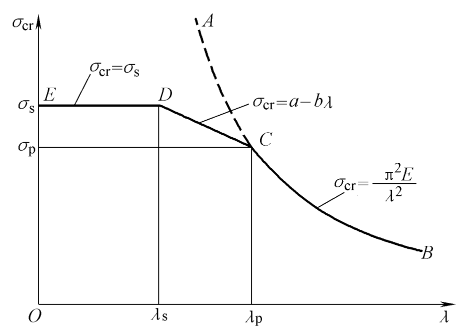


图 9-9　压杆的临界应力点图

对于中柔度杆，人们经长期实践发现，不同种类的材料适用于不同的公式。一般采用简单实用的经验公式计算其临界应力。它们分为

（1）直线型经验公式

$$\sigma_{cr}=a-b\lambda \tag{9-8}$$

式中，a、b 为与材料性能有关的常数。

相应的临界应力总图如图 9-9 所示。总图表明，当 $\lambda\geqslant\lambda_p$ 时，是线弹性稳定性问题，压杆属于大柔度杆，应当用欧拉公式计算临界应力；当 $\lambda_s\leqslant\lambda\leqslant\lambda_p$ 时，是弹塑性稳定问题，压杆属于中柔度杆，临界应力用直线型经验公式计算；当 $\lambda\leqslant\lambda_s$ 时，是塑性压缩强度问题，压杆属于小柔度杆，用强度公式计算失效应力。

对于中柔度杆，当 $\sigma_{cr}=\sigma_s$ 时，其相应的柔度 λ_s 为中长杆柔度的下限，据式（9-6）不难求得

$$\lambda_s=\frac{a-\sigma_s}{b} \tag{9-9}$$

例如 A3 钢，$\sigma_s=235\text{MPa}$，$a=304\text{MPa}$，$b=1.12\text{MPa}$，代入式（9-9）算得 $\lambda_s=61.6$。工程实践表明直线型经验公式适合于合金钢、铝合金、铸铁与松木等中柔度压杆。几种常用材料的 a、b 值列于表 9-2。一般而言，对于中柔度杆，材料的屈曲极限 σ_s 越高，相应的临界应力 σ_{cr} 也提高。因此，对于中柔度压杆，采用高屈曲极限的材料，可提高稳定性。

表 9-2　几种常用材料的 a、b、λ_p、λ_s

材料名称	a/MPa	b/MPa	λ_p	λ_s
硅钢 $\sigma_S=353\text{MPa}$ $\sigma_b\geqslant510\text{MPa}$	578	3.744	100	60

（续）

材料名称	a/MPa	b/MPa	λ_p	λ_s
铬钼钢	980	5.29	55	0
Q235 钢	304	1.12	100	57
优质碳钢 $\sigma_S=306$MPa $\sigma_b\geqslant471$MPa	461	2.568	86	60
铝合金	372	2.14	50	0
铸铁	331.9	1.453		
松木	29	0.19	59	0

（2）抛物线型经验公式

实验数据表明，压杆的承载力明显受到压力偏心的影响。短粗压杆比细长压杆所受到的压力偏心影响更大。此时可以采用两段式的抛物线公式计算临界应力。该公式的一般表达式为

$$\sigma_{cr}=a_1-b_1\lambda^2 \tag{9-10}$$

式中，a_1、b_1 为与材料性质有关的常数。几种常用材料的 a_1、b_1 的值列于表 9-3。相应的临界应力总图如图 9-10 所示。总图表明：①当 $\lambda\geqslant\lambda_c$ 时，是在材料比例极限内的稳定性问题，压杆属于细长杆，采用欧拉公式计算临界应力；②当 $\lambda\leqslant\lambda_c$ 时，是弹塑性稳定性问题，压杆是非细长杆，采用抛物线型经验公式计算临界应力。

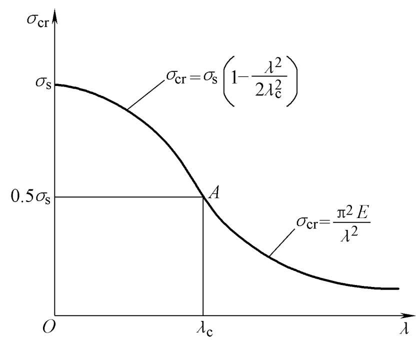


图 9-10 抛物线公式的临界应力总图

应当指出，在结构工程中，考虑到各种建筑用钢都是经冷轧加工成型，材料内部具有较大残余压应力。用这种材料制成的压杆，其残余应力的值可能达到屈服应力一半，此时可以取 $\sigma_p=\sigma_s/2$ 取代式（9-7）中低碳钢的比例极限 σ_p，即

$$\lambda_c=\pi\sqrt{\frac{2E}{\sigma_s}} \tag{9-11}$$

表 9-3 几种常用材料的 a_1、b_1

材料名称	a_1/MPa	b_1/MPa
Q235 钢	235	0.00668
Q275 钢	275	0.00853
16 锰钢	343	0.0142

于是，由式（9-11）外推计算参数

当 $\lambda=0$ 时，$\sigma_{cr}=\sigma_s$

当 $\lambda=\lambda_c$ 时，$\sigma_{cr}=\dfrac{\sigma_s}{2}$

得

$$\sigma_{cr}=\sigma_s\left(1-\frac{\lambda^2}{2\lambda_c^2}\right)$$

抛物线型经验公式考虑了中柔度压杆内的残余应力的影响。因而，对于结构钢与低合金结构钢等材料制作的中柔度压杆，可采用抛物线型经验公式计算临界应力。需要指出的是，影响实际压杆临界压力的因素很多，关于非细长杆临界压力的计算也有多种不同的观点。而工程中的压杆绝大多数为非细长杆，这类压杆临界压力的理论分析和实验研究至今仍是工程中关心的问题。在不同的工程设计中，可能按照设计规范采用不同的经验公式计算临界应力，请读者注意查阅相关的设计手册或设计规范。

例 9-1　A3 钢制成的矩形截面杆受到压力 $F=200\text{kN}$ 作用。杆两端为带夹板的柱形铰，约束情形如图 9-11 所示，其中 9-11a 为正视图，9-11b 为俯视图。在 A、B 两处用螺栓夹紧。已知截面尺寸 $l=2\text{m}$，$b=40\text{mm}$，$h=60\text{mm}$。材料常数 $E=210\text{GPa}$，$\sigma_p=210\text{MPa}$。求此杆的临界压力。

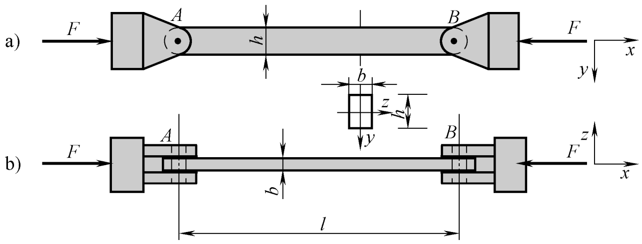


图　9-11

解：由于约束为带夹板的柱形铰，压杆 AB 在正视图 x-y 平面内失稳时，A、B 两处可以自由转动，相当于铰链约束。在俯视图 x-z 平面内失稳时，A、B 两处不能自由转动，可简化为固定约束。

$$\lambda_p=\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}=\pi\sqrt{\frac{210\times10^9}{210\times10^6}}=99.3$$

在 x-y 平面内：

$$I_z=\frac{1}{12}bh^3=7.2\times10^5\text{mm}^4$$

$$i_z=\sqrt{\frac{I_z}{A}}=\sqrt{\frac{7.2\times10^5}{40\times60}}\text{mm}=17.32\text{mm}$$

$$\mu=1,\ \lambda_z=\frac{\mu l}{I_z}=\frac{1\times2000}{17.32}=115$$

在 x-z 平面内：

$$I_y=\frac{1}{12}hb^3=3.2\times10^5\text{mm}^4, i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}=\sqrt{\frac{3.2\times10^5}{40\times60}}\text{mm}=11.55\text{mm}$$

$$\mu=0.5, \lambda_y=\frac{\mu l}{i_y}=\frac{0.5\times2000}{11.55}=86.6$$

对于同一根杆，采用最大柔度值判别。因为 A3 钢的 $\lambda_p=102$，$\lambda_z>\lambda_p$ 属于大柔度杆，采用

欧拉公式

$$F_{cr}=A\cdot\sigma_{cr}=b\cdot h\cdot\frac{\pi^2E}{(\lambda_z)^2}=\left(40\times60\times10^{-6}\times\frac{\pi^2\times210\times10^9}{115^2}\right)\text{N}=373\times10^3\text{N}=373\text{kN}$$

例 9-2 图 9-12 所示为一用 20a 工字钢制成的压杆，两端可以简化为固定端约束。材料为 Q235 钢，$E=200\text{GPa}$，$\sigma_p=200\text{MPa}$，压杆的长度 $l=5\text{m}$。求此压杆的临界压力。

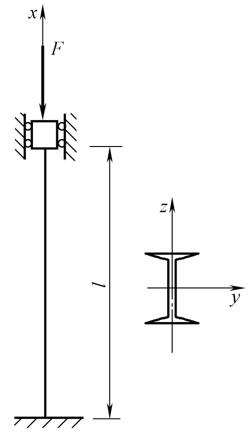


图 9-12

解：(1) 求压杆的柔度

由附录中的型钢表查得 $i_y=8.51\text{cm}$，$i_z=2.12\text{cm}$，$A=35.5\text{cm}^2$

压杆在惯性半径 i 最小的纵向平面内柔度最大，临界压力最小。因而，压杆若失稳一定发生在压杆柔度最大的纵向平面内。最大的柔度为

$$\lambda_{max}=\lambda_y=\frac{\mu l}{i_y}=\frac{0.5\times5}{2.12\times10^{-2}}=118$$

(2) 计算 λ_p

$$\lambda_p=\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}=\pi\sqrt{\frac{200\times10^9}{200\times10^6}}=99.4$$

(3) 求临界压力

因为 $\lambda_{max}>\lambda_p$，此压杆是细长杆，用欧拉公式计算临界压力

$$F_{cr}=A\cdot\sigma_{cr}=A\cdot\frac{\pi^2E}{(\lambda_z)^2}=\left(35.5\times10^{-4}\times\frac{\pi^2\times200\times10^9}{118^2}\right)\text{N}=504\times10^3\text{N}=504\text{kN}$$

9.4 大柔度杆在小偏心距下偏心压缩时的稳定性

以上讨论的都是理想压杆。即：材质均匀、压力与轴线无偏心、压杆无初弯曲等理想情况。但实际压杆却不同于理想压杆，难免存在各种缺陷。例如，压杆有初弯曲、压力与轴线有偏心、不完善的端部约束条件以及材料不均匀等。一般情况下，缺陷的存在使得压杆既受压缩载荷作用，又受弯曲载荷作用，可用具有小偏心距 e 的理想压杆来代替有缺陷的压杆。图 9-13 所示为两端球形铰支的等直细长压杆，受偏心距为 e 的偏心压力 F 作用下的挠曲线。x-y 平面是杆的纵向对称面，轴向偏心压力就在此平面内，杆在该平面内的抗弯刚度为 EI。任意横截面 x 处的挠度为 v，弯矩为

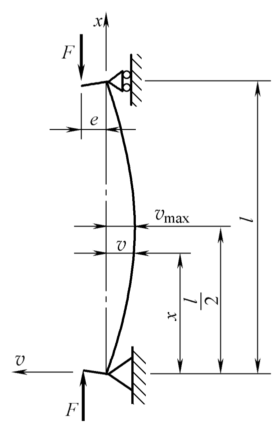


图 9-13 小偏心距小的压杆失稳

$$M(x)=-F(e+v)$$

挠曲线的近似微分方程为

$$EIv''=-F(e+v)$$

或

$$v''+k^2v=-ke$$

其中

$$k^2=\frac{F}{EI}$$

此微分方程的通解为

$$v=C_1\sin kx+C_2\cos kx-e \tag{a}$$

式中，C_1、C_2 为积分常数。压杆的两端铰支，边界条件为

$$v\big|_{x=0}=0 \tag{b}$$

$$v\big|_{x=l}=0 \tag{c}$$

由式（b）、式（c）得

$$C_2=e, C_1=e\tan\frac{kl}{2} \tag{d}$$

将式（d）代入式（a）得到失稳后的挠曲线的方程

$$v=e\left(\tan\frac{kl}{2}\sin kx+\cos kx-1\right) \tag{e}$$

最大挠度 $v_{\max}$ 在杆的中点，即 $x=l/2$ 处。将 $x=l/2$ 代入式（e），得最大挠度

$$v=e\left(\sec\frac{kl}{2}-1\right) \tag{9-12}$$

当给定偏心距 $e=e_1$、$e=e_2$、…后，由式（9-12）计算出一系列最大挠度 $v_{\max}$ 与载荷 F 的对应值，从而绘出一组不同偏心距下的 F-$v_{\max}$ 曲线，如图 9-14 所示。

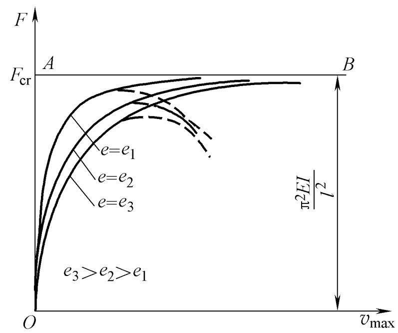


图 9-14　偏心距对临界压力的影响

将式（9-12）改写为

$$\sec\frac{kl}{2}=\frac{v_{\max}}{e}+1 \tag{f}$$

现在讨论 $e\to0$ 情况：由式（f）可见，当 $e\to0$ 时，若 $\sec\frac{kl}{2}$ 不趋于无限大，则必有 $v_{\max}=0$；若 $\sec\frac{kl}{2}$ 趋于无限大，$v_{\max}$ 将为任意值。而 $\sec\frac{kl}{2}$ 趋于无限大时，$\frac{kl}{2}$ 的最小值为 $\frac{kl}{2}=\frac{\pi}{2}$。由此得到

$$k=\sqrt{\frac{F}{EI}}=\frac{\pi}{l}$$

即

$$F=\frac{\pi^2EI}{l^2} \tag{g}$$

由以上分析，给出的 $e\to0$ 时的 F-$v_{\max}$ 关系曲线为图 9-14 中的折线 OAB。在 $e\neq0$ 情况下，由式（f）可见，当 $v_{\max}\to$□时，$\sec\frac{kl}{2}\to$□，即 $F\to\frac{\pi^2EI}{l^2}$，这表明图 9-12 中偏心距不等于零的一组 F-$v_{\max}$ 关系曲线，均以式（g）所表示的水平直线为渐近线。而式（g）正是两端铰支细长压杆临界压力的表达式，这说明中心受压杆件的临界压力，只能看成是实际压杆承载能力的一个理论上的上限值。

9.5 压杆稳定性设计

工程上通常采用下列两种方法进行压杆的稳定计算。

1. 安全因数法

为了保证压杆不失稳，并具有一定的安全裕度，因此压杆的稳定条件可表示为

$$n=\frac{F_{cr}}{F_{max}}\geqslant[n_{st}] \tag{9-13a}$$

或

$$F_{max}\leqslant\frac{F_{cr}}{[n_{st}]} \tag{9-13b}$$

式中，F_{max}为压杆允许的最大工作载荷；F_{cr}是压杆的临界载荷；$[n_{st}]$ 是稳定安全因数。由于压杆存在初曲率和载荷偏心等不利因素的影响，$[n_{st}]$ 值一般比强度安全因数要大些，并且 λ 越大，$[n_{st}]$ 值也越大。具体取值可从有关设计手册中查到。在机械、动力、冶金等工业部门，由于载荷情况复杂，一般都采用安全因数法进行稳定计算。

例 9-3 柱由两个 20a 的槽钢组成。柱长 $l=6$m，下端固定上端铰支如图 9-15a 所示。材料是 A3 钢，$E=210$GPa，$\sigma_p=210$MPa，$\sigma_s=245$MPa，$a=304$MPa，$b=1.12$MPa，$[\sigma]=160$MPa。稳定安全因数 $[n_{st}]=3$。试求当：（1）两个槽钢紧靠在一起（连接为一整体，如图 9-15b 所示）的许用载荷 $[F_1]$；（2）两槽钢拉开距离 a 后又用连接缀条焊接在一起（图 9-15c、d），并使 $I_y=I_z$。柱的许用载荷 $[F]$。

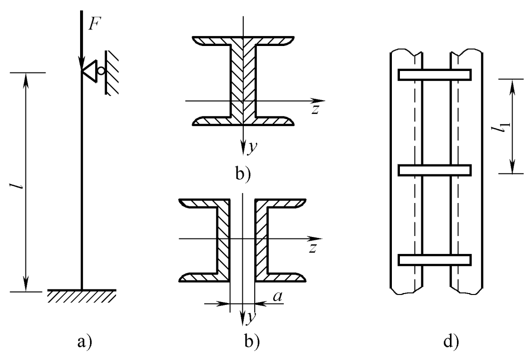


图 9-15

解：（1）两槽钢紧靠的情况

由型钢表查得

$$A=(2\times28.83\times10^2)\,\text{mm}^2=5.766\times10^3\,\text{mm}^2$$

$$I_{min}=I_y=(2\times244\times10^4)\,\text{mm}^4=4.88\times10^6\,\text{mm}^4,\ i_{min}=i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}=\sqrt{\frac{4.88\times10^6}{5.766\times10^3}}\,\text{mm}=29.1\text{mm}$$

$$\lambda_y=\frac{\mu l}{i_y}=\frac{0.7\times6\times10^3}{29.1}=144$$

$$\lambda_p=\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}=\pi\sqrt{\frac{210\times10^9}{210\times10^6}}=99.3,\qquad \lambda_s=\frac{a-\sigma_s}{b}=\frac{340-245}{1.12}=52.6$$

因为，$\lambda_y>\lambda_p$ 属于大柔度杆，采用欧拉公式

$$F_{cr}=A\times\frac{\pi^2E}{\lambda_y^2}=\left(5.766\times10^{-3}\times\frac{\pi^2\times210\times10^9}{144^2}\right)\text{kN}=576.3\text{kN}$$

于是压杆的许用载荷为

$$[F_1]=\frac{F_{cr}}{[n_{st}]}=\frac{576.3}{3}=192\text{kN}$$

（2）$I_y=I_z$ 的情况

$$I_y=I_z=(2\times1780\times10^4)\text{mm}^4=3.56\times10^7\text{mm}^4$$

$$i_z=\sqrt{\frac{3.56\times10^7}{5.766\times10^3}}\text{mm}=78.6\text{mm}$$

$$\lambda_z=\frac{\mu l}{i_z}=\frac{0.7\times6\times10^3}{78.6}=53.4$$

因为，$\lambda_p>\lambda_z>\lambda_s$ 属于大柔度杆，采用线性公式

$$F_{cr}=A\times(a-b\lambda_z)=[5.766\times10^{-3}\times(304-1.12\times53.4)\times10^6]\text{kN}=1408\text{kN}$$

压杆的许用载荷为

$$[F_2]=\frac{F_{cr}}{[n_{st}]}=\frac{1408}{3}=469\text{kN}$$

将两种情况进行比较，$[F_2]$ 是 $[F_1]$ 的 2.44 倍。可见，当压杆的两个方向约束情况相同时，应使截面的两个形心主矩相等。但此时应注意压杆的连接构造问题。首先，为保证 $I_y=I_z$，两个槽钢拉开的间距 a 应足够大，如本例，因单个槽钢的最小形心主矩 $I_{min}=128\times10^4\text{mm}^4$，根据

$$2\times\left[128\times10^4\text{mm}^4+28.83\times10^2\text{mm}^2\left(20.1\text{mm}+\frac{a}{2}\right)^2\right]=2\times1780\times10^4\text{mm}^4$$

可求得 $a\geqslant111.2\text{mm}$。

其次，为保证每个槽钢不发生局部失稳，沿柱长每隔 l_1 的长度内应有连接板或称缀板（见图 9-15d）。

例 9-4　图 9-16a 所示结构，BD 为直径 $d=80\text{mm}$ 的钢质圆杆，梁 ABC 为槽钢截面（见图 9-16b），$y_C=65\text{mm}$，C 为形心，截面对中性轴 z 的惯性矩 $I_z=291\times10^4\text{mm}^4$。尺寸及载荷如图所示。若钢材的 $\sigma_p=200\text{MPa}$，$\sigma_s=240\text{MPa}$，$E=200\text{GPa}$，$a=304\text{MPa}$，$b=1.12\text{MPa}$。规定的稳定安全因数为 $n_{st}=3$。槽钢的弯曲许用应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$。试计算该结构的许可载荷 $[F]$。

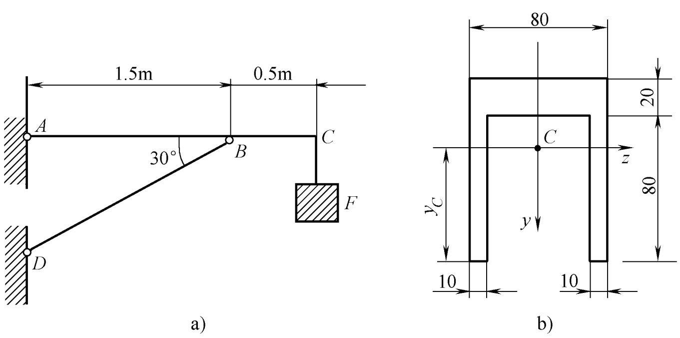


图　9-16

解：（1）静力平衡分析

$$\sum M=0, 1.5\text{m}\times F_{BD}\cdot\sin30°-2\text{m}\times F=0$$

$$F=\frac{1.5}{4}F_{BD}=\frac{3}{8}F_{BD}$$

（2）分析 BD 压杆稳定性

BD 压杆长度为：$l_{CD}=\dfrac{1.5\text{m}}{\cos30°}=1.73\text{m}$

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{1\times l_{CD}}{d/4}=\frac{1\times1730}{80/4}=86.5$$

$$\lambda_{\text{p}}=\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{p}}}}=\pi\sqrt{\frac{200\times10^9}{200\times10^6}}=99.3,\qquad \lambda_{\text{s}}=\frac{a-\sigma_{\text{s}}}{b}=\frac{304-240}{1.12}=57$$

因为，$\lambda_{\text{s}}<\lambda<\lambda_{\text{p}}$ 属于中柔度杆，采用直线公式计算 BD 压杆临界压力

$$(F_{BD})_{\text{cr}}=\frac{\pi d^2}{4}(a-b\lambda)=\frac{\pi\times0.08^2}{4}(304-1.12\times86.6)\times10^6\text{N}=1040.5\text{kN}$$

BD 压杆的最大工作压力

$$(F_{BD})_{\max}=\frac{1040.5\text{kN}}{3}=346.8\text{kN}$$

相应的最大外载荷

$$F_{\max}^{(1)}=\frac{3}{8}F_{BD}=130\text{kN}$$

（3）分析梁 ABC 的弯曲强度

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}=\frac{F\times0.5\times65\times10^{-3}}{291\times10^4\times10^{-12}}\text{Pa}\leqslant160\times10^6\text{Pa}$$

相应的最大外载荷

$$F_{\max}^{(2)}\leqslant\frac{160\times10^6\times291\times10^4\times10^{-12}}{0.5\times65\times10^{-3}}\text{N}=14326\text{N}=14.3\text{kN}$$

该结构的许可载荷 $F_{\max}=\min\ \{F_{\max}^{(1)},\ F_{\max}^{(2)}\}=14.3\text{kN}$

2. 稳定因数法*

压杆的稳定条件有时用应力的形式表达为

$$\sigma_{\max}=\frac{F_{\max}}{A}\leqslant[\sigma_{\text{st}}] \tag{9-14}$$

式中，$F_{\max}$ 为压杆允许的最大工作载荷；A 为横截面面积；$[\sigma_{\text{st}}]$ 为稳定许用应力。$[\sigma_{\text{st}}]=\dfrac{\sigma_{\text{cr}}}{[n_{\text{st}}]}$，它总是小于强度许用应力 $[\sigma]$。于是式（9-9）又可表达为

$$\sigma_{\max}=\frac{F_{\max}}{A}\leqslant\varphi[\sigma] \tag{9-15}$$

式中，φ 称为稳定因数，它由下式确定：

$$\varphi=\frac{[\sigma_{\text{st}}]}{[\sigma]}=\frac{\sigma_{\text{cr}}}{[n_{\text{st}}]}\cdot\frac{n}{\sigma_{\text{u}}}=\frac{\sigma_{\text{cr}}}{\sigma_{\text{u}}}\cdot\frac{n}{[n_{\text{st}}]}<1$$

式中，σ_u 为强度计算中的危险应力，由临界应力总图（见图 9-9）可看出，$\sigma_{cr}<\sigma_u$，且 $n<[n_{st}]$，故 φ 为小于 1 的因数，φ 也是柔度 λ 的函数。表 9-4 所列为几种常用工程材料的 φ-λ 对应数值。对于柔度为表中两相邻 λ 值之间的 φ，可由直线内插法求得。由于考虑了杆件的初曲率和载荷偏心的影响，即使对于粗短杆，仍应在许用应力中考虑稳定因数 φ。在土建工程中，一般按稳定因数法进行稳定计算。

表 9-4　压杆的稳定因数

$\lambda=\frac{\mu l}{i}$	φ			
	3 号钢	16Mn 钢	铸铁	木材
0	1.000	1.000	1.00	1.00
10	0.995	0.993	0.97	0.99
20	0.981	0.973	0.91	0.97
30	0.958	0.940	0.81	0.93
40	0.927	0.895	0.69	0.87
50	0.888	0.840	0.57	0.80
60	0.842	0.776	0.44	0.71
70	0.789	0.705	0.34	0.60
80	0.731	0.627	0.26	0.48
90	0.669	0.546	0.20	0.38
100	0.604	0.462	0.16	0.31
110	0.536	0.384		0.26
120	0.466	0.325		0.22
130	0.401	0.279		0.18
140	0.349	0.242		0.16
150	0.306	0.213		0.14
160	0.272	0.188		0.12
170	0.243	0.168		0.11
180	0.218	0.151		0.10
190	0.197	0.136		0.09
200	0.180	0.124		0.08

还应指出，在压杆计算中，有时会遇到压杆局部有截面被削弱的情况，如杆上有开孔、切槽等。由于压杆的临界载荷是从研究整个压杆的弯曲变形来决定的，局部截面的削弱对整体变形影响较小，故稳定计算中仍用原有的截面几何量。但强度计算是根据危险点的应力进行的，故必须对削弱了的截面进行强度校核，即

$$\sigma=\frac{F}{A_n}\leqslant[\sigma] \tag{9-16}$$

式中，A_n 是横截面的净面积。

9.6　提高压杆承载能力的措施

压杆的稳定性取决于临界载荷的大小。由临界应力总图可知，当柔度 λ 减小时，则临界应力提高，而 $\lambda=\mu l/i$，所以提高压杆承载能力的措施主要是尽量减小压杆的长度，选用

合理的截面形状，增加支承的刚性以及合理选用材料。现分述如下：

1. 减小压杆的长度

减小压杆的长度，可使 λ 降低，从而提高了压杆的临界载荷。工程中，为了减小柱子的长度，通常在柱子的中间设置一定形式的撑杆，它们与其他构件连接在一起后，对柱子形成支点，限制了柱子的弯曲变形，起到减小柱长的作用。对于细长杆，若在柱子中设置一个支点，则长度减小一半，而承载能力可增加到原来的 4 倍。

2. 选择合理的截面形状

压杆的承载能力取决于最小的惯性矩 I，当压杆各个方向的约束条件相同时，使截面对两个形心主轴的惯性矩尽可能大，而且相等，是压杆合理截面的基本原则。因此，薄壁圆管（见图 9-17a）、正方形薄壁箱形截面（见图 9-17b）是理想截面，它们各个方向的惯性矩相同，且惯性矩比同等面积的实心杆大得多。但这种薄壁杆的壁厚不能过薄，否则会出现局部失稳现象。对于型钢截面（工字钢、槽钢、角钢等），由于它们的两个形心主轴惯性矩相差较大，为了提高这类型钢截面压杆的承载能力，工程实际中常用几个型钢，通过缀板组成一个组合截面，如图 9-17c、d 所示。并选用合适的距离 a，使 $I_z=I_y$，这样可大大提高压杆的承载能力。但设计这种组合截面杆时，应注意控制两缀板之间的长度 l_1，以保证单个型钢的局部稳定性。

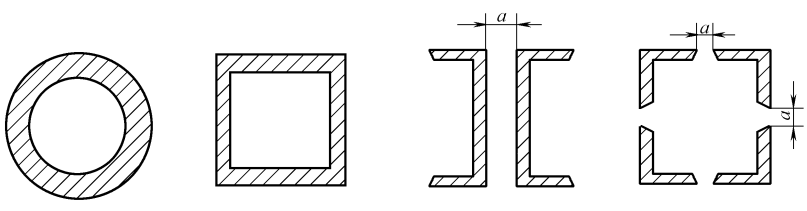


图 9-17　压杆的合理截面形状

3. 增加支承的刚性

对于大柔度的细长杆，一端铰支另一端固定压杆的临界载荷比两端铰支的大一倍。因此，杆端越不易转动，杆端的刚性越大，长度因数就越小，如图 9-18 所示压杆，若增大杆右端推力轴承的长度 a，就加强了约束的刚性。

4. 合理选用材料

对于大柔度杆，临界应力与材料的弹性模量 E 成正比。因此当柔度和截面积相同时，钢质压杆比铜质、铸铁或铝质压杆的临界载荷高。但对于不同牌号钢材，弹性模量基本相同，所以对大柔度杆，选用优质钢材与选用低碳钢相比并无多大差别。对中柔度杆，由临界应力总图可以看到，材料的屈服极限 σ_s 和比例极限 σ_p 越高，则临界应力就越大。这时选用优质钢材会提高压杆的承载能力。至于小柔度杆，本来就是强度问题，优质钢材的强度高，其承载能力的提高是显然的。

最后尚需指出，对于压杆，除了可以采取上述几方面的措施以提高其承载能力外，在可能的条件下，还可以从结构方面采取相应的措施。例如，将结构中的压杆转换成拉杆，这样，就可以从根本上避免失稳问题，以图 9-19 所示的托架为例，在不影响结构使用的条件下，若图 9-19a 所示结构改换成图 9-19b 所示结构，则 AB 杆由承受压力变为承受拉力，从

而避免了压杆的失稳问题。

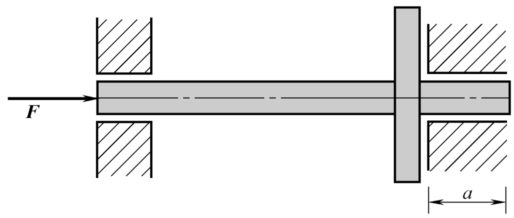


图 9-18　增加支承刚度的措施

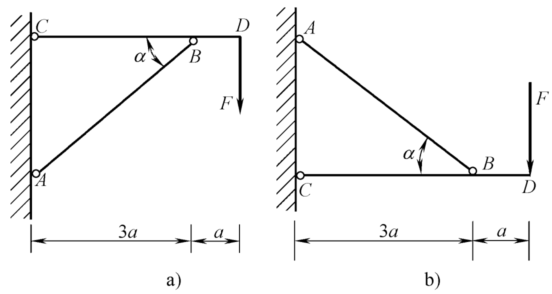


图 9-19　压杆转换成拉杆

本 章 小 结

1. 受压直杆在受到干扰后，由直线平衡形式转变为弯曲平衡形式，而且干扰撤除后，压杆仍保持为弯曲平衡形式，则称压杆丧失稳定，简称失稳或屈曲。

压杆失稳的条件是受的压力 $F \geqslant F_{cr}$。F_{cr} 称为临界压力。

2. 压杆的临界压力 $F_{cr}=\sigma_{cr}A$，临界应力 σ_{cr} 的计算公式与压杆的柔度 $\lambda=\dfrac{\mu l}{i}$ 所处的范围有关。以 3 号钢的压杆为例：

$\lambda \geqslant \lambda_p$，称为大柔度杆，$\sigma_{cr}=\dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}$。

$\lambda_s \leqslant \lambda \leqslant \lambda_p$，称为中柔度杆，$\sigma_{cr}=a-b\lambda$。

$\lambda \leqslant \lambda_s$，称为小柔度杆，$\sigma_{cr}=\sigma_s$。

3. 压杆的稳定计算有两种方法：

1）安全因数法

$n=\dfrac{F_{cr}}{F} \geqslant n_{st}$，$n_{st}$ 为稳定安全因数。

2）稳定因数法

$\sigma=\dfrac{F}{A} \leqslant [\sigma_{st}]=\varphi[\sigma]$，$\varphi$ 为稳定因数。

4. 根据 $\lambda=\dfrac{\mu l}{i}$，$i=\sqrt{\dfrac{I}{A}}$，λ 越大，则临界压力（或临界应力）越低。提高压杆承载能力的措施为：

1）减小杆长。

2）增强杆端约束。

3）提高截面形心主轴惯性矩 I。且在各个方向的约束相同时，应使截面的两个形心主轴惯性矩相等。

4）合理选用材料。

思考题

9-1　什么叫作压杆失稳？什么叫作临界应力？欧拉公式的适用范围是什么？试画出临界应力总图。

9-2　什么叫作柔度？它反映了哪些方面对临界应力的影响？根据柔度的情况可将压杆分为哪几类？

9-3　图 9-20 所示各中心受压杆的材料、长度及抗弯刚度均相同，其中临界压力最大的为______，临界压力最小的为______。

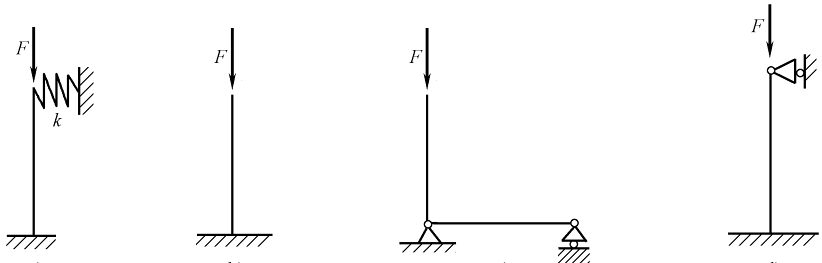


图 9-20　思考题 9-3 图

9-4　四根截面不同的细长压杆在其端部约束相同，其截面形状如图 9-21 所示。如果各杆截面的面积相等，其中最合理的是______，最不合理的是______。

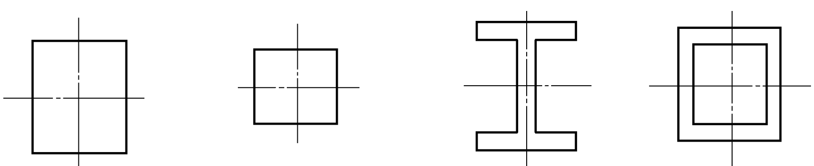


图 9-21　思考题 9-4 图

9-5　一根压杆失稳总是发生在______的纵向平面内。

（A）截面惯性半径最小；　　（B）长度因数 μ 最大；

（C）柔度 λ 最大；　　（D）柔度 λ 最小。

9-6　图 9-22a、b 所示中心受压杆中，实心圆杆与空心圆杆的横截面面积相同。从稳定性角度考虑，图 9-22a、b 两种布置方案中较为合理的是______。

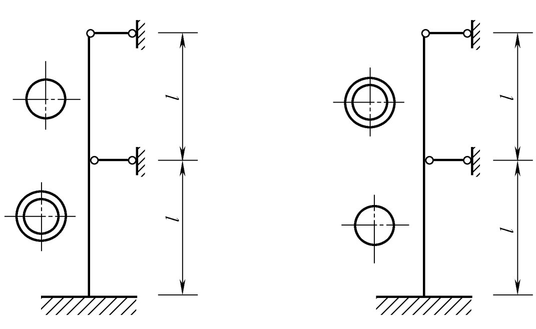
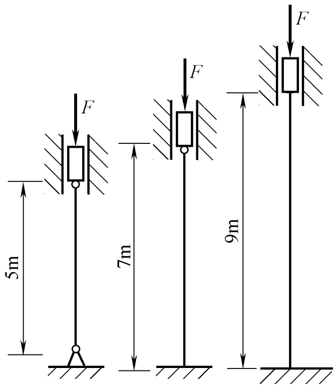


图 9-22　思考题 9-6 图

习　题

9-1　图 9-23 所示的细长压杆均为圆杆，其直径 d 均相同，材料为 Q235 钢，$E=210\text{GPa}$。其中，图 9-23a所示为两端铰支；图 9-23b 所示为一端固定，一端铰支；图 9-23c 所示为两端固定。试判别哪一种情形的临界压力最大，哪种其次，哪种最小？若圆杆直径 $d=16\text{cm}$，试求临界压力 F_{cr}。

9-2　图 9-24 所示蒸汽机的活塞杆 AB，约束可以简化为两端铰链形式。杆长 $l=180\text{cm}$，横截面为圆形，直径 $d=7.5\text{cm}$。材料为 A3 钢，$E=210\text{GPa}$，试求活塞杆的临界压力 F_{cr}。



a)　　b)　　c)

图 9-23　题 9-1 图

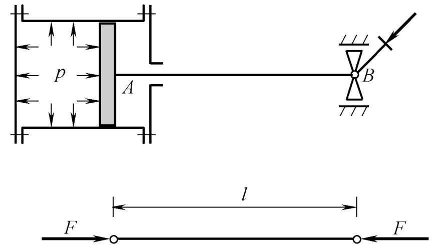
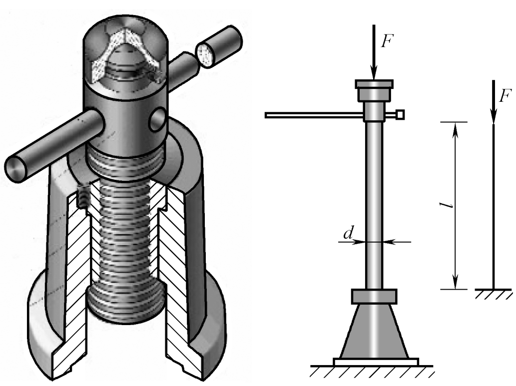


图 9-24　题 9-2 图

9-3　图 9-25 所示千斤顶的内螺杆内径 $d=40\text{mm}$，杆长 $l=1500\text{mm}$。杆件约束可以简化为一端固定一端自由的形式。材料的弹性模量 $E=200\text{GPa}$，$\sigma_p=200\text{MPa}$。试求千斤顶内螺杆的临界压力 F_{cr}。

9-4　由三根钢管构成的支架如图 9-26 所示。钢管的外径为 $D=30\text{mm}$，内径为 $d=22\text{mm}$，长度 $l=2.5\text{m}$，$E=210\text{GPa}$，$\sigma_p=200\text{MPa}$。在支架的顶点三杆铰接。若取稳定安全因数 $n_{st}=3$，试求许可载荷 [F]。



a)　　b)

图 9-25　题 9-3 图

a）千斤顶结构　b）力学模型

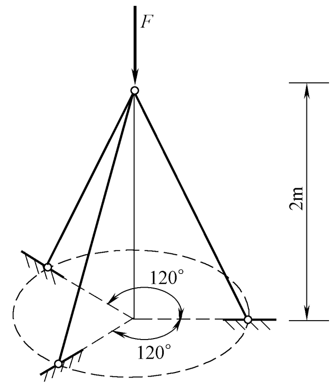


图 9-26　题 9-4 图

9-5　在图 9-27 所示铰接杆系 ABC 中，AB 和 BC 皆为细长压杆，且截面相同，材料一样。若因在 ABC 平面内失稳而破坏，并规定 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，试确定 F 为最大值时的 θ 角。

9-6　图 9-28 所示结构 AB 为圆截面直杆，直径 $d=80\text{mm}$，A 端固定，B 端与 BC 直杆球铰连接。BC 杆

为正方形截面，边长 $a=70\text{mm}$，C 端也是球铰。两杆材料是 Q235 钢，弹性模量 $E=200\text{GPa}$，比例极限 $\sigma_p=200\text{MPa}$，长度 $l=3\text{m}$，求该结构的临界压力 F_{cr}。

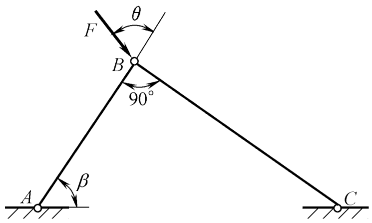


图 9-27　题 9-5 图

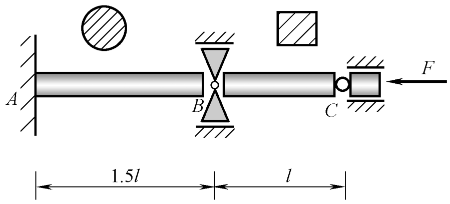


图 9-28　题 9-6 图

9-7　图 9-29 所示托架中杆 AB 的直径 $d=40\text{mm}$，长度 $l=80\text{cm}$，两端可视为铰支，材料是 Q235 钢。

（1）试按杆 AB 的稳定条件求托架的临界压力 F_{cr}；

（2）若已知实际载荷 $F=70\text{kN}$，稳定安全因数 $n_{st}=2$，问此托架是否安全？

9-8　图 9-30 所示立柱由两根 10 号槽钢组成，立柱上端为球铰，下端固定，柱长 $l=6\text{m}$，试求两槽钢距离 a 值取多少时立柱的临界压力最大？其值是多少？已知材料的弹性模量 $E=200\text{GPa}$，比例极限 $\sigma_p=200\text{MPa}$。

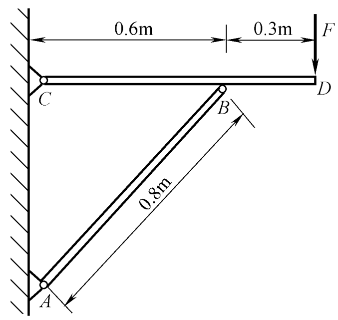


图 9-29　题 9-7 图

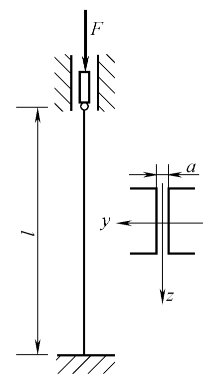


图 9-30　题 9-8 图

9-9　如图 9-31 所示，一根大柔度压杆 ABC 两端用球铰链约束于 A 端和 C 端。在杆的中点处，施加一对平面铰链，以防止杆中点产生与纸面平行的（图中绕 2-2 轴转动）水平位移，但是铰链不限制垂直于纸面的（图中绕 1-1 轴转动）位移。杆截面为 32a 号工字形，材料的弹性模量 $E=200\text{GPa}$，长度 $L=5.5\text{m}$，杆的稳定安全因数为 $n_{st}=2.4$。试确定其可承受的最大压力 F。

9-10　某快锻水压机工作台油缸柱塞如图 9-32 所示。已知油压 $p=32\text{MPa}$，柱塞直径 $d=120\text{mm}$，伸入油缸的最大行程 $l=1600\text{mm}$，材料为 A3 钢，材料的弹性模量 $E=210\text{GPa}$，比例极限 $\sigma_p=200\text{MPa}$。试求柱塞的工作安全因数。

9-11　无缝钢管厂的穿孔顶杆如图 9-33 所示。杆长 $l=4.5\text{m}$，横截面直径 $d=150\text{mm}$，弹性模量 $E=210\text{GPa}$，比例极限 $\sigma_p=200\text{MPa}$。两端可简化为铰支座，规定 $n_{st}=3.3$。试求顶杆的许可压力。

9-12　一木柱两端铰支，其截面为 $A=120\text{mm}\times200\text{mm}$ 的矩形，长度为 $l=4\text{m}$。木材的弹性模量 $E=10\text{GPa}$，比例极限 $\sigma_p=20\text{MPa}$。确定压杆的临界应力。计算临界应力的公式有：

（a）欧拉公式；（b）直线公式 $\sigma_{cr}=28.7-0.19\lambda$。

9-13　某厂自制的简易起重机如图 9-34 所示，其压杆 BD 为 20 号槽钢，材料为 A3 钢。起重机的最大起重量是 $P=40\text{kN}$。若规定的稳定安全因数为 $n_{st}=5$，试校核 BD 杆的稳定性。

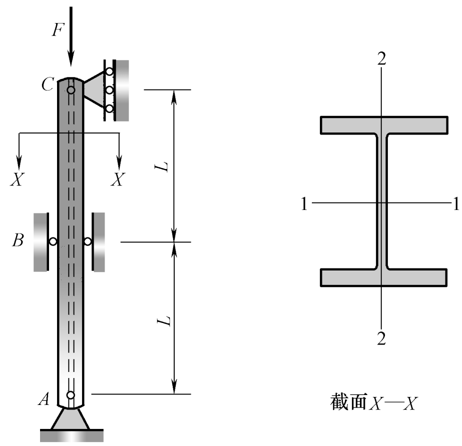


图 9-31　题 9-9 图

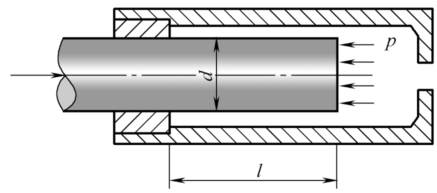


图 9-32　题 9-10 图

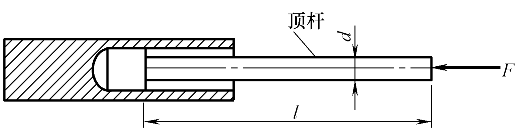


图 9-33　题 9-11 图

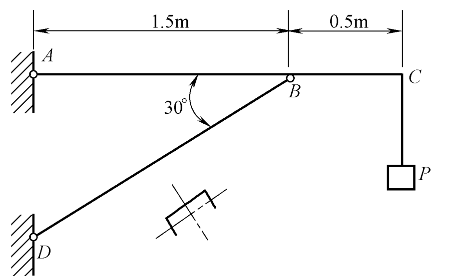


图 9-34　题 9-13 图

9-14　下端固定、上端铰支、长 $l=4\text{m}$ 的压杆，由两根 10 号槽钢焊接而成，如图 9-35 所示。已知杆的材料为 3 号钢，强度许用应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$，试求压杆的许可荷载。

9-15　如图 9-36 所示，水平梁 ABC 在 A 点固定铰链约束，在 B、C 点通过铰链与直径为 $d=60\text{mm}$ 的钢质圆截面杆件 BD、CE 相连接。D 点的约束允许沿纸面水平方向运动，但是限制垂直方向运动和转动，E 点为固定铰链约束。材料的弹性模量 $E=200\text{GPa}$，比例极限 $\sigma_p=200\text{MPa}$，屈服应力 $\sigma_s=235\text{MPa}$。设中柔度杆临界应力公式为：$\sigma_{cr}=(304-1.12\lambda)$ MPa。如果距离 $a=200\text{mm}$，求水平梁 ABC 可以承受的临界荷载 F_{max}。

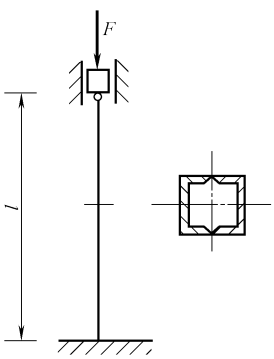


图 9-35　题 9-14 图

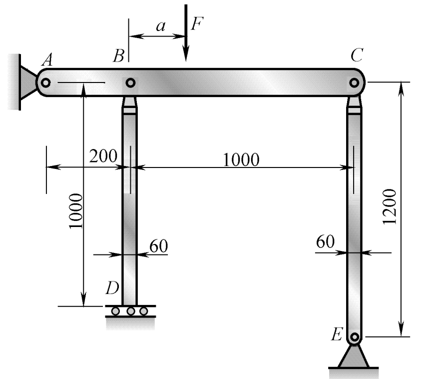


图 9-36　题 9-15 图

9-16 如图 9-37 所示，矿井巷道的顶板通过水平梁及若干相同的立柱支护。立柱为直径 $d=120\text{mm}$ 的圆截面杆，杆长 $L=2.1\text{m}$，两端均可以简化为固定铰链约束。材料的弹性模量 $E=200\text{GPa}$，比例极限 $\sigma_p=200\text{MPa}$，屈服应力 $\sigma_s=235\text{MPa}$。设中柔度杆临界应力公式为：$\sigma_{cr}=(304-1.12\lambda)$ MPa。如果水平梁受到总压力 $F=5000\text{kN}$，杆的稳定安全因数为 $n_{st}=2$，求支撑该水平梁的立柱个数。

9-17 图 9-38 所示结构中 AC 与 CD 杆均用 A3 钢制成，C、D 两处均为球铰。已知 $d=20\text{mm}$，$b=100\text{mm}$，$h=180\text{mm}$；材料的弹性模量 $E=200\text{GPa}$，屈服极限 $\sigma_s=235\text{MPa}$，强度极限 $\sigma_b=400\text{MPa}$，强度安全因数 $n=2.0$，稳定安全因数 $n_{st}=3.0$。试确定该结构的最大许可载荷。

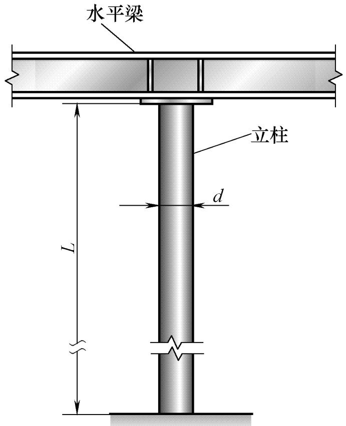


图 9-37 题 9-16 图

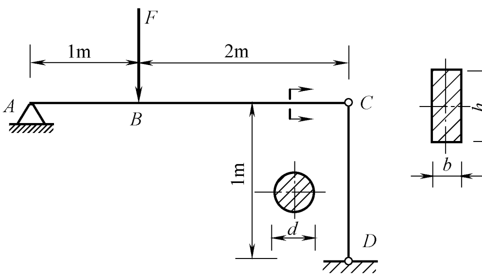


图 9-38 题 9-17 图

9-18 两端固定的管道长为 2m，内径 $d=30\text{mm}$，外径 $D=40\text{mm}$。材料为 A3 钢，$E=210\text{GPa}$，线膨胀系数 $\alpha=1.25\times10^{-5}\text{K}^{-1}$。若安装管道时的温度为 10℃，试求不引起管道失稳的最高温度。

第 10 章
能量方法

内容梗概：设弹性体是一个保守系统，外力功 W 将以弹性变形能 U 的形式积蓄在弹性体内部，具有对外界做功的潜在能力。根据物理学中的功能原理，应有 $U=W$。利用这种功能概念解决固体力学问题的方法统称为能量法。在弹性体内，微元体单位体积变形能也称应变比能。线弹性杆件在发生拉（压）、弯、扭组合变形时，其变形能普遍表达式为 $U=\int_l \frac{F_N^2(x)\,dx}{2EA}+\int_l \frac{M^2(x)\,dx}{2EI}+\int_l \frac{T^2(x)\,dx}{2GI_p}$。单位载荷法：若要计算外力作用下结构上某点某方向的位移（或转角），可在该点该方向上施加单位力（或单位力偶），分别求外载荷引起的构件 i 的内力 $M_i(x)$、$F_{Ni}(x)$、$T_i(x)$ 及单位载荷引起的构件 i 的内力 $\overline{M}_i(x)$，$\overline{F}_{Ni}(x)$，$\overline{T}_i(x)$（$i=1$，2，…，n），则结构某点沿某方向的位移（或转角）计算公式为 $\Delta=\sum_{i=1}^{n}\int_{l_i}\frac{F_{Ni}(x)\,\overline{F}_{Ni}(x)\,dx}{(EA)_i}+\sum_{i=1}^{n}\int_{l_i}\frac{M_i(x)\,\overline{M}_i(x)\,dx}{(EI)_i}+\sum_{i=1}^{n}\int_{l_i}\frac{T_i(x)\,\overline{T}_i(x)\,dx}{(GI_p)_i}$。此式称为莫尔积分，其中 n 表示结构由 n 个杆件组成。图乘法是根据莫尔积分利用外载荷和单位载荷引起的内力图计算结构某点某方向位移的方法。计算公式为 $\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_i\cdot\overline{M}_{Ci}}{EI}$，其中 ω_i 是 $M(x)$ 与 x 轴所围成的第 i 个子图形面积，$\overline{M}_{Ci}$是外力引起的 M（x）第 i 个子图形面积形心 x_{Ci}所对应的单位力引起的 $\overline{M}(x)$ 图的纵坐标值。

10.1 概述

1. 弹性应变能与功能原理

弹性体在载荷作用下将发生变形，外力作用点要产生位移。因此，在弹性体的变形过程中，外力沿其作用方向做了功，称为外力功，用 W 表示。对于弹性体，因为变形是可逆的，外力功将以一种能量形式积蓄在弹性体内部。当将载荷逐渐卸除时，该能量又将重新释放出来做功，使弹性体恢复到变形前的形状。例如，钟表里的发条在被拧紧的过程中，发生了弹性变形而积蓄了能量，在它放松的过程中可带动指针转动，从而发条就做了功。弹性体伴随弹性变形积蓄了能量，从而具有对外界做功的潜在能力，通常把这种形式的能量称为弹性应变能或弹性变形能，用 U 表示。

根据物理学中的功能原理，积蓄在弹性体内的应变能 U 及能量损耗 ΔE 在数值上应等于

载荷所做的功，即

$$U+\Delta E=W$$

如果在加载过程中动能及其他形式的能量损耗不计，应有

$$U=W \tag{10-1}$$

利用上述的这种功能概念解决固体力学问题的方法统称为能量法，相应的基本原理统称为功能原理。弹性体的功能原理的应用非常广泛，它是目前在工程中得到广泛应用的有限单元法的重要理论基础。若外力在加载过程中所做的功全部以应变能的形式积蓄在弹性体内，即在加载和卸载的过程中能量没有任何损失，则只要得到加载过程中外力功的数值，弹性体应变能的数值也就可以计算出来，所以说外力功是应变能的一种度量。

2. 外力功

如果外力在做功过程中保持不变，它所做的功等于外力与其相应位移的乘积。例如，在沿外力 F 方向线上有线位移 Δ，则 $W=F\cdot\Delta$。然而，在线弹性变形过程中，构件所承受的载荷从零开始随弹性变形缓慢地增加到最终值，其过程是变力做功。此时，外力功不等于外力与其相应位移的乘积。例如，图 10-1 所示的简单受拉杆，拉力由零逐渐增加到定值 F，由 F 产生的伸长变形由零逐渐增加到 Δl，这就是拉力 F 的作用点的位移。如果材料服从胡克定律，则外力 F 与位移 Δl 呈线性关系（见图 10-2a）。设 F_1 表示加载过程中拉力的一个值，相应的位移为 Δl_1，此时将拉力增加一微量 dF_1，使其产生相应的位移增量 $d(\Delta l_1)$，这时，已经作用在杆上的拉力 F_1 将在该位移增量上做全功，其值为

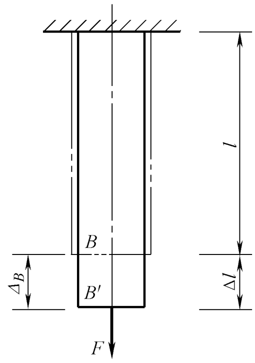


图 10-1　等截面杆拉伸变形

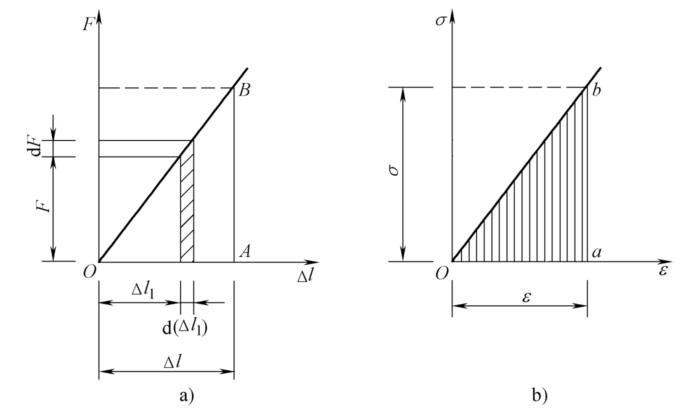


图 10-2　线弹性杆拉伸时的外力功与变形能

$$dW=F_1\cdot d(\Delta l_1) \tag{10-2}$$

在式（10-2）中略去了 dF_1 在 $d(\Delta l_1)$ 上做的功，这部分功为二阶微量。dW 在图 10-2a 中以阴影面积来表示。拉力从零增加到 F 的整个加载过程中所做的总功则为这种单元面积的总和，也就是 $\triangle OAB$ 的面积，即

$$W=\int_0^F F_1\cdot d(\Delta l_1)=\frac{1}{2}F\Delta l$$

上述积分是准静态加载过程中，外力功的积累，可以称为静载荷做功的过程积分。积分结果的因数 1/2，反映线弹性材料的响应特征。将以上的分析推广到其他的受力情况，在静载荷下外力功的计算式可写为

$$W=\frac{1}{2}F\cdot\Delta \tag{10-3}$$

式中，F 是广义力，它可以是集中力或集中力偶；Δ 是与广义力 F 相对应的广义位移，它可以是线位移或角位移。式（10-3）表明，当外力由零逐渐增加时，在符合胡克定律的范围内，外力在其相应位移上所做的功，等于外力最终值与相应位移最终值乘积的一半。

10.2 杆件应变能的计算

1. 轴向拉（压）杆的应变能

按照功能原理，应变能可以由外力的功得到。当轴向拉（压）杆的变形处于线弹性范围内时，外力所做的功与杆件的应变能相等

$$U=W=\int_0^l F_1\cdot \mathrm{d}(\Delta l)=\frac{1}{2}F\Delta l$$

由图 10-1 知，杆件任一横截面上的轴力

$$F_N=F$$

考虑到胡克定律有

$$\Delta l=\frac{F_N l}{EA}$$

所以，拉（压）杆的应变能为

$$U=\frac{F_N^2 l}{2EA} \tag{10-4a}$$

或

$$U=\frac{EA\ (\Delta l)^2}{2l} \tag{10-4b}$$

若外力较复杂，轴力沿杆轴线为变量 $F_N=F_N(x)$，可以先计算长度为 $\mathrm{d}x$ 微段内的应变能，再按积分的方法计算整个杆件的应变能，即

$$\mathrm{d}U=\frac{F_N^2(x)\,\mathrm{d}x}{2EA}$$

$$U=\int_l \frac{F_N^2(x)\,\mathrm{d}x}{2EA} \tag{10-5}$$

由式（10-5）可知，杆内的应变能是二次函数，因此不可以应用叠加原理计算应变能。下面以图 10-3a 所示的拉杆为例加以说明。拉杆在 F_1、F_2 同时作用下的应变能为

$$U=\frac{(F_1+F_2)^2 l}{2EA}=\frac{F_1^2 l}{2EA}+\frac{F_1F_2 l}{EA}+\frac{F_2^2 l}{2EA} \tag{a}$$

而当 F_1、F_2 单独作用时（见图 10-3b、c），杆的应变能分别为

$$U_1=\frac{F_1^2 l}{2EA} \tag{b}$$

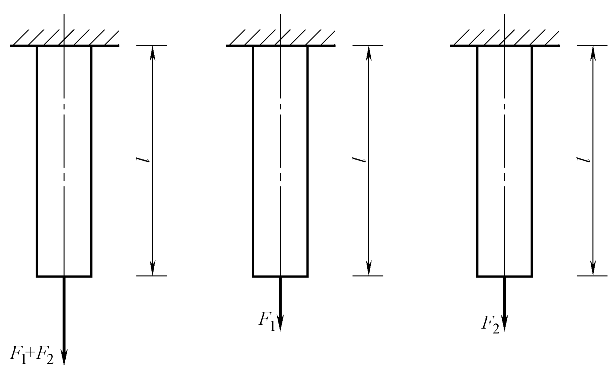


图 10-3　线弹性杆在不同载荷作用下做功

和

$$U_2=\frac{F_2^2 l}{2EA} \tag{c}$$

比较式（a）、式（b）和式（c），显然有

$$U\neq U_1+U_2$$

可见对图 10-3a 所示的情况不能用叠加原理计算应变能。其原因是这些载荷所做的功是互相影响的，即载荷除在其自身引起的位移上做功外，在其他载荷引起的位移上也要做功，所以不能将各载荷单独分析再进行叠加。这样的载荷称为同类型荷载。例如，若先将 F_1 作用在拉杆上，杆件有伸长量 Δl_1，则 F_1 所做的功为

$$W_1=\frac{1}{2}F_1\Delta l_1 \tag{d}$$

在 F_1 不卸除的情况下，再施加 F_2，杆件又伸长了 Δl_2，故变力 F_2、常力 F_1 所做的功为

$$W_2=\frac{1}{2}F_2\Delta l_2 \tag{e}$$

和

$$W_3=F_1\cdot\Delta l_2 \tag{f}$$

则整个加载过程外力所做的功为

$$W=W_1+W_2+W_3=\frac{1}{2}F_1\Delta l_1+\frac{1}{2}F_2\Delta l_2+F_1\Delta l_2 \tag{g}$$

如果将式（g）转化为应变能则同样得到式（a）。其中 W_3 就是两力所做功互相影响的结果。

计算弹性体的应变能时，应当注意应变能的数值只与外载荷的最终值有关而与加载次序及过程无关。对于上述的拉杆，若先施加 F_2 再施加 F_1，通过类似的计算可以证明，杆件内积蓄的应变能与上述分析结果一样，当然也与 F_1、F_2 同时作用时一样。可见，积蓄在弹性体内的弹性应变能只决定于弹性体变形的最终状态，或者说只决定于作用在弹性体上的载荷和位移的最终值，与加载的先后次序无关。

为了对构件的弹性变形能有更全面的了解，不但要知道整个构件所能积蓄的应变能，而且要知道杆的单位体积内所能积蓄的应变能。对于承受均匀拉力的杆（见图 10-1），杆内各

部分的受力和变形情况相同，所以每单位体积内积蓄的应变能相等，可用杆的应变能 U 除以杆的体积 V 来计算。这种单位体积内的应变能，称为应变能密度或应变比能，简称比能，并用 u 表示，于是

$$u=\frac{U}{V}=\frac{\frac{1}{2}F_{\mathrm{N}}l}{Al}=\frac{1}{2}\sigma\varepsilon$$

可见应变比能 u 的数值也可以用应力-应变曲线图中 $\triangle Oab$ 的面积来表示（见图 10-2b）。根据胡克定律 $\sigma=E\varepsilon$，比能又可以写成下列形式：

$$u=\frac{1}{2}\sigma\varepsilon=\frac{\sigma^2}{2E}=\frac{E\varepsilon^2}{2} \tag{10-6}$$

2. 剪切变形时的应变能及比能

为了分析方便，从受剪切杆中截取如图 10-4a 所示的单元体，该单元体处于纯剪切应力状态，假想其在一个面（如左侧面）上被固定起来，则在切应力由零逐渐增加到 τ 值的过程中，单元体将发生如图所示的变形，与此对应的切应变由零增加到 γ 值，其右侧面向下的位移为 $\Delta=\gamma\mathrm{d}x$。当材料在线弹性范围内工作时，其 τ 与 γ 成正比（见图 10-4b）。所以，单元体各表面上的剪力在单元体变形过程中所做的功为

$$\mathrm{d}W=\frac{1}{2}(\tau\mathrm{d}y\mathrm{d}z)\cdot\Delta=\frac{1}{2}(\tau\mathrm{d}y\mathrm{d}z)(\gamma\mathrm{d}x)$$

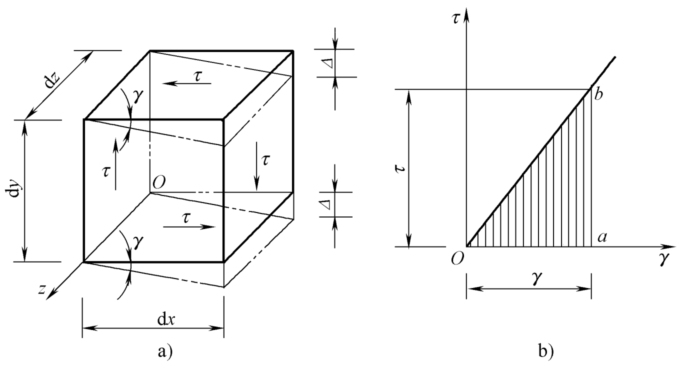


图 10-4　纯剪切微元体的应变比能

式中，做功的力是单元体右侧面上的剪力。由于切应变 γ 很小，其余各面上的剪力，在其作用方向上没有位移，都没有在其作用方向上做功。故单元体内积蓄的应变能为

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}W=\frac{1}{2}\tau\gamma\cdot\mathrm{d}V$$

单元体内积蓄的应变比能则为

$$u=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}V}=\frac{1}{2}\tau\gamma$$

这表明，u 等于 τ-γ 直线下的面积。由剪切胡克定律 $\tau=G\gamma$，比能又可以写成下列形式：

$$u=\frac{1}{2}\tau\gamma=\frac{\tau^2}{2G}=\frac{G\gamma^2}{2} \tag{10-7}$$

3. 圆轴扭转时的应变能及比能

如图 10-5a 所示的受扭圆轴，若扭转力偶矩由零开始缓慢增加到最终值 T，则在线弹性范围内，相对扭转角 φ 与扭转力偶矩 M_x 间的关系是一条直线（见图 10-5b）。与轴向拉伸杆件相似，扭转圆轴的应变能应为

$$U=W=\frac{1}{2}M_x\varphi$$

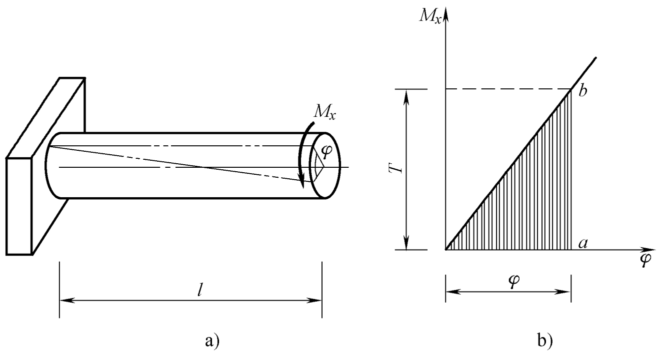


图 10-5　圆轴扭转的应变能

由于圆轴横截面上的扭矩 $T=M_x$，且

$$\varphi=\frac{Tl}{GI_p}$$

所以，受扭圆轴的应变能为

$$U=\frac{GI_p\varphi^2}{2l} \tag{10-8}$$

实际上，受扭圆轴中各点的应力状态均为纯剪切应力状态，因而可以直接采用公式(10-7)，求积分即得杆件的应变能。因为切应力 $\tau=\frac{T\rho}{I_p}$，所以

$$U=\int_V v\mathrm{d}V=\int_l\int_A\frac{\tau^2}{2G}\mathrm{d}A\mathrm{d}x=\frac{l}{2G}\left(\frac{T}{I_p}\right)^2\int_A\rho^2\mathrm{d}A=\frac{T^2l}{2GI_p}$$

当扭矩 T 沿轴线为变量时，上式变为

$$U=\int_l\frac{T^2(x)\mathrm{d}x}{2GI_p} \tag{10-9}$$

可见利用比能计算全杆内积蓄的应变能应用范围更广，该方法适用于杆各横截面上内力变化（相应横截面上各点处的应力也不同）的情况。

4. 弯曲变形时的应变能及比能

（1）纯弯曲梁　设如图 10-6a 所示的简支梁在两端的纵向对称平面内受到外力偶 M_0 作用而发生纯弯曲，在加载过程中，梁的各横截面上的弯矩均有 $M=M_0$，故梁在线弹性范围内工作时，其轴线弯曲成为一段圆弧（见图 10-6a），两端横截面有相对的转动，其夹角为

$$\theta=\frac{l}{\rho}$$

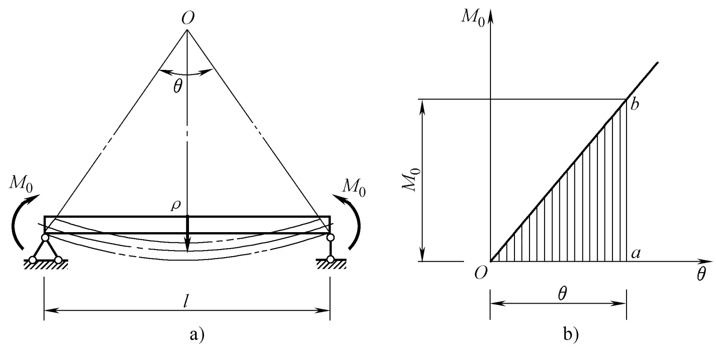


图 10-6　纯弯曲梁的应变能

且

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M_0}{EI}$$

故

$$\theta=\frac{M_0 l}{EI}$$

在线弹性范围内，当弯曲外力偶矩由零逐渐增加到 M_0 时，梁两端截面上相对转动产生的夹角从零逐渐增加到 θ，M_0 与 θ 的关系也是斜直线（见图 10-6b），所以杆件纯弯曲变形时的应变能为

$$U=W=\frac{1}{2}M_0 l=\frac{M_0^2 l}{2EI}=\frac{EI\theta^2}{2l} \tag{10-10}$$

（2）横力弯曲梁　在工程实际中，最常遇到的是受横力弯曲的梁（见图 10-7a）。这时，

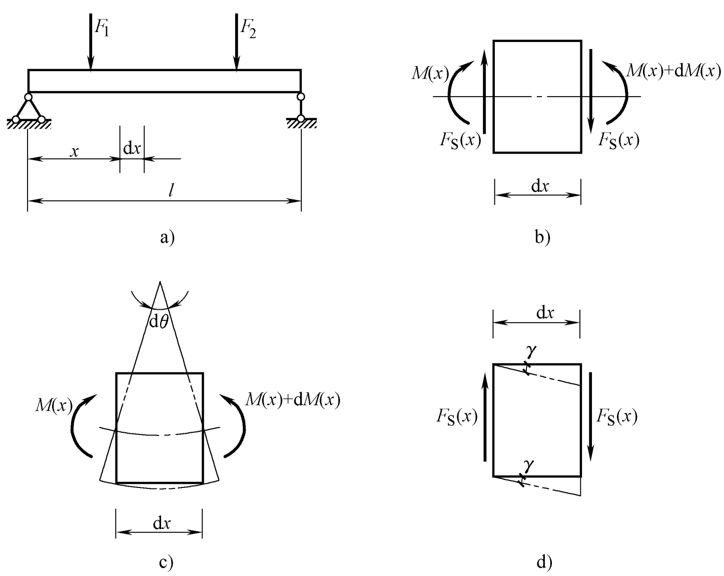


图 10-7　横力弯曲梁的应变能

梁横截面上同时作用有剪力和弯矩，所以梁的应变能应包括两部分：弯曲应变能和剪切应变能。由于剪力和弯矩通常均随着截面位置的不同而变化，都是 x 的函数，因此，计算梁的应变能应从分析梁上长为 $\mathrm{d}x$ 的微段开始（见图 10-7b）。

在弯矩的作用下，微段产生弯曲变形，两端横截面有相对的转动（见图 10-7c）；在剪力的作用下，微段产生剪切变形，两端横截面有相对的错动（见图 10-7d）。由于在小变形的情况下，弯曲正应力不会引起切应变，切应力也不会引起线应变，或者说，由弯矩产生的位移与由剪力产生的位移互相垂直，因此，可以先分别计算出弯矩和剪力在各自相应的变形位移上所做的功，然后根据叠加原理将它们叠加起来。但由于在工程中常用的梁往往为细长梁，与切应力对应的剪切应变能，比与弯矩对应的弯曲应变能小得多，可以不计，所以只需要计算弯曲应变能。微段梁左右两端横截面上的弯矩应分别为 $M(x)$ 和 $M(x)+\mathrm{d}M(x)$。在计算其应变能时，弯矩增量 $\mathrm{d}M(x)$ 所做的功为二阶微量，可忽略不计，因此可将该微段看作是纯弯曲的情况。应用式（10-10）可求得微段的弯曲应变能

$$\mathrm{d}U=\frac{M^2(x)\,\mathrm{d}x}{2EI}$$

全梁的弯曲应变能则可积分上式得到

$$U=\int_l \frac{M^2(x)\,\mathrm{d}x}{2EI} \qquad (10\text{-}11)$$

如果梁中各段内的弯矩 $M(x)$ 由不同的函数表示，上列积分应分段进行，然后再求其总和。由以上各种变形形式下应变能的计算式可以看出，应变能是力的二次函数，也是变形的二次函数。当构件同时受几个力（或力偶）作用时，能否用叠加原理求应变能呢？

5. 圆杆组合变形时的应变能

如果作用在杆件上的任一载荷所引起的变形与其他载荷之间不发生耦合关系，即在杆件的任一载荷作用方向上，其他载荷均不在该载荷方向上引起位移，不会产生耦合功。则此载荷与其他载荷将属于不同载荷类型，则仍可应用叠加原理计算应变能。这样可以先单独计算每一种载荷作用下杆件的应变能，然后经过叠加得出杆件的总的应变能。

在线弹性和小变形条件下，杆件发生拉（压）、弯、剪、扭组合变形的应变能就属于这种情况。图 10-8 所示的微段杆是从处于拉、弯、扭组合变形下的圆杆中取出的，其长度为 $\mathrm{d}x$，横截面上的轴力 $F_N(x)$、弯矩 $M(x)$ 和扭矩 $T(x)$ 均只在各自引起的位移 $\mathrm{d}(\Delta l)$、$\mathrm{d}\theta$

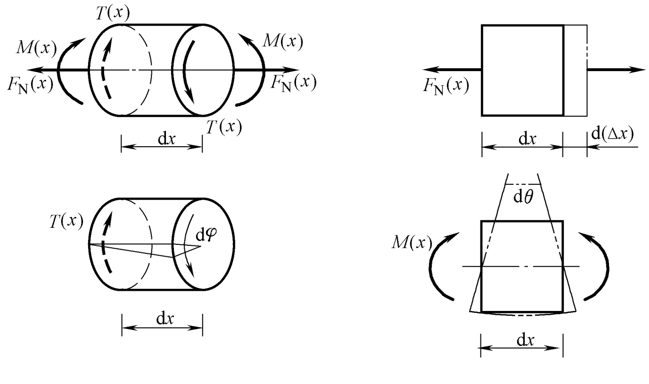


图 10-8　组合变形杆件的应变能

和 dφ 上做功，各类载荷所做的功互相没有影响，故微段杆内的应变能可用叠加原理计算，即

$$dU=dW=\frac{1}{2}F_N(x)\cdot d(\Delta l)+\frac{1}{2}M(x)\cdot d\theta+\frac{1}{2}T(x)\cdot d\varphi=\frac{F_N^2(x)dx}{2EA}+\frac{M^2(x)dx}{2EI}+\frac{T^2(x)dx}{2GI_p}$$

整个圆杆的应变能则为

$$U=\int_l\frac{F_N^2(x)dx}{2EA}+\int_l\frac{M^2(x)dx}{2EI}+\int_l\frac{T^2(x)dx}{2GI_p} \qquad (10\text{-}12)$$

6. 应变能的普遍表达式

以上讨论了杆件在基本变形和简单组合变形下应变能的计算，现在研究更普遍的情况。如图 10-9 所示，设有 n 个广义力 F_1、F_2、…、F_n 作用在线弹性体上，且所设约束条件足以使它只会发生由于变形引起的位移，不会发生刚体位移。Δ_1、Δ_2、…、Δ_n 表示载荷沿各自作用方位上的广义位移（见图 10-9）。由于弹性体在变形过程中积蓄的应变能，只决定于作用在弹性体上的载荷和位移的最终值，与加载的先后次序无关。为计算方便起见，不管实际加载的情况如何，在计算应变能时可以假设这些载荷按同一比例因数 β 从零增长到终值。相应地物体产生变形（广义位移）Δ_1、Δ_2、…、Δ_n。对于线弹性材料，则变形也将按相同比例 β 增加。这时，外力对物体做功称为变形功，这一功以变形能储藏在物体内。如果外力在某一中间值 βF_1、βF_2、…、βF_n 时，外力有一增量 dβ，此时外力将在位移增量 $\Delta_1 d\beta$、$\Delta_2 d\beta$、…、$\Delta_n d\beta$ 上做功为

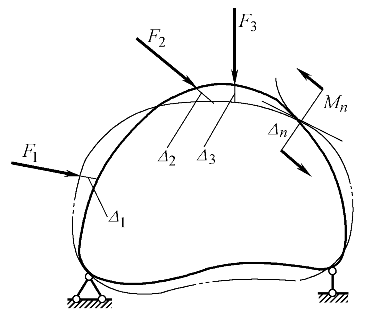


图 10-9　应变能的普遍表达形式

$$dW=F_1\Delta_1\beta d\beta+F_2\Delta_2\beta d\beta+\cdots+F_n\Delta_n\beta d\beta$$

外力从零到终值（即 β 从 0 到 1）做的功可积分上式：

$$W=(F_1\Delta_1+\cdots+F_n\Delta_n)\int_0^1\beta d\beta=\frac{1}{2}F_1\Delta_1+\frac{1}{2}F_2\Delta_2+\cdots+\frac{1}{2}F_n\Delta_n \qquad (10\text{-}13)$$

所以，物体的变形能为

$$U=W=\frac{1}{2}F_1\Delta_1+\frac{1}{2}F_2\Delta_2+\cdots+\frac{1}{2}F_n\Delta_n \qquad (10\text{-}14)$$

这表示线弹性体的应变能等于各载荷与其相应位移乘积的二分之一的总和。这一结论称为克拉贝依隆原理。

10.3 互等定理

由前面的讨论可知，对线弹性体结构，积蓄在弹性体内的弹性应变能只决定于作用在弹性体上的载荷的最终值，与加载的先后次序无关。由此可以导出功的互等定理和位移互等定理。它们在结构分析中有重要应用。

1. 功的互等定理

功的互等定理又称互等功定理，是意大利的 E. 贝蒂（E. Betti）于 1872 年和英国的瑞

利（Rayleigh）于 1873 年分别独立提出的，所以又称贝蒂-瑞利互等功定理。以一根处于线弹性阶段的简支梁为例说明。设图 10-10a、b 代表梁的两种受力状态，1、2 截面为其上任意两截面。如图 10-10a 所示，F_1 使梁在截面 1、2 上的位移分别为 Δ_{11} 和 Δ_{21}；在图 10-10b 中，当 F_2 作用时，在截面 1、2 上产生的位移则分别为 Δ_{12} 和 Δ_{22}。在位移符号的下标中，第一个表示截面位置，第二个指是由哪个力引起的。

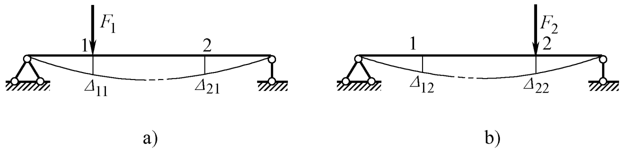


图 10-10　功的互等定理

现在用两种办法在梁上加载，来计算 F_1、F_2 共同作用时外力的功。先施加 F_1 再施加 F_2 时（见图 10-11a），外力的功

$$W_1=\frac{1}{2}F_1\Delta_{11}+\frac{1}{2}F_2\Delta_{22}+F_1\Delta_{12}$$

而当先施加 F_2 再施加 F_1 时（图 10-11b），外力的功

$$W_2=\frac{1}{2}F_2\Delta_{22}+\frac{1}{2}F_1\Delta_{11}+F_2\Delta_{21}$$

由于杆件的应变能等于外力的功，与加载次序无关，即 $V_\varepsilon=W_1=W_2$，所以有

$$F_1\Delta_{12}=F_2\Delta_{21} \tag{10-15}$$

这表明，第一个力在第二个力引起的位移上所作的功，等于第二个力在第一个力引起的位移上所作的功。这就是功的互等定理。

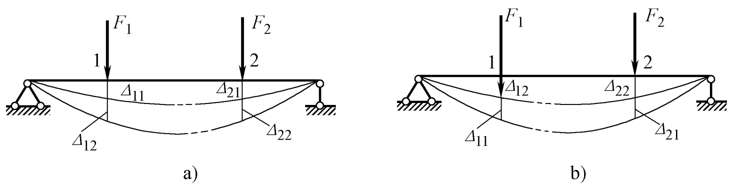


图 10-11　位移互等定理

2. 位移互等定理

位移互等定理又称互等位移定理，是英国的 J. C. 麦克斯韦（J. C. Maxwell）于 1864 年提出的，又称麦克斯韦位移互等定理。基于功的互等定理，当 $F_1=F_2$ 时，由式（10-15）可推出一个重要的推论，即

$$\Delta_{12}=\Delta_{21} \tag{10-16}$$

这表明，作用在截面 1 上的载荷使杆件在截面 2 上产生的位移 Δ_{21}，等于将此载荷作用在截面 2 上而在截面 1 上产生的位移 Δ_{12}。这就是位移互等定理。

若令 $F_1=F_2=1$（即为单位力），且此时用 δ 表示位移，则有

$$\delta_{12}=\delta_{21}$$

由于 1、2 两截面是任意的，故上述关系可写为以下一般形式

$$\delta_{ij}=\delta_{ji} \tag{10-17}$$

即 j 处作用的单位力在 i 处产生的位移，等于 i 处作用的单位力在 j 处产生的位移。这是位移互等定理的特殊表达形式。这些分析对弹性体上作用集中力偶时显然也是适用的，不过相应的位移是角位移，所以上述互等定理中的力和位移泛指广义力和广义位移。

例 10-1　平面直角刚架 ABC 受垂直集中力 F 作用，各杆尺寸如图 10-12 所示，各段 EI 和 GI_p 均为常量。试求：（1）杆的应变能；（2）C 处的垂直位移 Δ_y。

解：（1）变形能计算

如图 10-13 所示，在各杆的截面上设定坐标 x_1 和 x_2，则内力 $M(x)$ 和 $T(x)$ 可以分段表示为

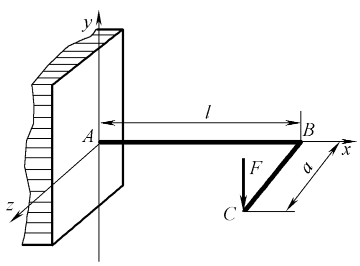


图　10-12

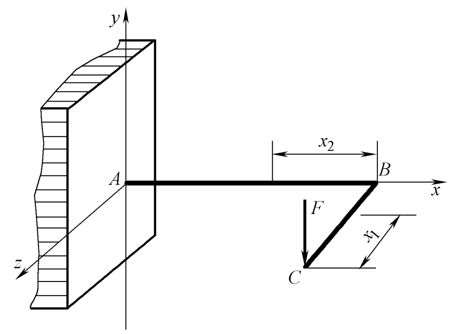


图　10-13

$$\left.\begin{aligned}M(x_1)&=-Fx_1\\T(x_1)&=0\end{aligned}\right\}x_1\in[0,a]$$

$$\left.\begin{aligned}M(x_2)&=-Fx_2\\T(x_2)&=Fa\end{aligned}\right\}x_2\in[0,l]$$

所以

$$U=\int\left(\frac{M^2(x)\,\mathrm{d}x}{2EI}\right)+\int\left(\frac{T^2(x)\,\mathrm{d}x}{2GI_p}\right)$$

$$U=\int_0^a\frac{M^2(x_1)\,\mathrm{d}x}{2EI}+\int_0^a\frac{T^2(x_1)\,\mathrm{d}x}{2GI_p}+\int_0^l\frac{M^2(x_2)\,\mathrm{d}x}{2EI}+\int_0^l\frac{T^2(x_2)\,\mathrm{d}x}{2GI_p}$$

$$U=\int_0^a\frac{(-Fx_1)^2\mathrm{d}x}{2EI}+0+\int_0^l\frac{(-Fx_2)^2\mathrm{d}x}{2EI}+\int_0^l\frac{(Fa)^2\mathrm{d}x}{2GI_p}=$$

$$=\frac{F^2a^3}{6EI}+\frac{F^2l^3}{6EI}+\frac{F^2a^2l}{2GI_p}$$

外力功

$$W=\frac{1}{2}F\cdot\Delta_y$$

根据式（10-14），得

$$\Delta_y=\frac{2U}{F}=\frac{Fa^3}{3EI}+\frac{Fl^3}{3EI}+\frac{Fa^2l}{GI_p}=\frac{F(a^3+l^3)}{3EI}+\frac{Fa^2l}{GI_p}$$

例 10-2 如图 10-14 所示，一根矩形等截面简支梁，在梁中间受集中力 F 作用。试导出横力弯曲变形能 U_B 和剪切变形能 U_S，比较这种两变形能的大小。

解：（1）变形能计算

在距 A 点为 x 的截面上内力为 $M(x)$、$F_S(x)$，则矩形截面简支梁的正应力和切应力为

$$\sigma=\frac{M(x)}{I}y,\ \tau=\frac{F_S(x)s_z^*}{Ib}$$

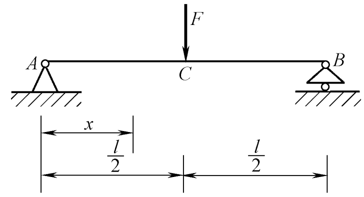


图 10-14

设弯曲应变比能为 u_B，剪切应变比能为 u_S。分别计算得到

$$u_B=\frac{\sigma^2}{2E}=\frac{M^2(x)y^2}{2EI^2},u_S=\frac{\tau^2}{2G}=\frac{F_S(x)(s_z^*)^2}{2GI^2b^2}$$

所以

$$U_B=\int_V u_B\mathrm{d}V=\int_l\int_A\frac{M^2y^2}{2EI^2}\mathrm{d}A\mathrm{d}x=\int_l\left[\frac{M^2}{2EI^2}\int_A y^2\mathrm{d}A\right]\mathrm{d}x$$

$$U_S=\int_V u_S\mathrm{d}V=\int_l\int_A\frac{F_S^2\ (s_z^*)^2}{2GI^2b^2}\mathrm{d}A\mathrm{d}x=\int_l\left[\frac{F_S^2}{2GI^2}\int_A\frac{(s_z^*)^2}{b^2}\mathrm{d}A\right]\mathrm{d}x$$

令 $\int_A y^2\mathrm{d}A=I$，并令 $$k=\frac{A}{I^2}\int_A\frac{(s_z^*)^2}{b^2}\mathrm{d}A$$

则有

$$U_B=\int_l\frac{M^2(x)\mathrm{d}x}{2EI},\ U_S=\int_l\frac{kF_S^2(x)\mathrm{d}x}{2GA}$$

横力弯曲总应变能

$$U=U_B+U_S=\int_l\frac{M^2(x)\mathrm{d}x}{2EI}+\int_l\frac{kF_S^2(x)\mathrm{d}x}{2GA}$$

对于矩形截面梁，无量纲参数 k 为

$$k=\frac{A}{I^2}\int_A\frac{(s_z^*)^2}{b^2}\mathrm{d}A=\frac{144}{bh^5}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{1}{4}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)b\mathrm{d}y=\frac{6}{5}$$

对其他截面形状，同理可求得相应的 k，例如圆形截面 $k=\frac{10}{9}$，圆管截面梁 $k=2$。

（2）两种变形能的比较

对于图 10-15 所示矩形截面简支梁

$$M(x)=\frac{F}{2}x,F_S(x)=\frac{F}{2}$$

则按上式

$$U_B=2\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{1}{2EI}\left(\frac{F}{2}x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{F^2l^3}{96EI},U_S=2\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{k}{2GA}\left(\frac{F}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{kF^2l}{8GA}$$

总应变能

$$U=U_B+U_S=\frac{F^2l^3}{96EI}+\frac{kF^2l}{2GA}$$

两种应变能之比

$$U_S:U_B=\frac{12EIk}{GAl^2}$$

矩形截面 $k=\frac{6}{5}$，$\frac{I}{A}=\frac{h^2}{12}$，$G=\frac{E}{2(1+\mu)}$

所以 $$U_S:U_B=\frac{12(1+\mu)}{5}\left(\frac{h}{l}\right)^2$$

取 $\mu=0.3$，当$\frac{l}{h}=5$，以上比值为 0.125；当$\frac{l}{h}=10$，以上比值为 0.0312。可见对细长梁，剪切应变能可以忽略不计，而短粗梁则应予考虑。

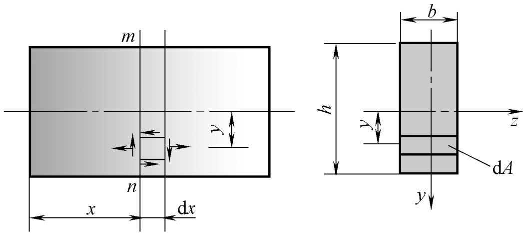


图 10-15　梁中 m—n 截面上的应力

例 10-3　装有尾顶针的车削工件可简化成超静定梁如图 10-16a 所示，试用互等定理求解 B 支座的约束力。

解：解除支座 B，把工件看成悬臂梁，将切削力 F 及顶针约束力 F_B 作为第一组力，设想在同一悬臂梁右端作用单位力 $X=1$ 作为第二组力。在 $X=1$ 作用下悬臂梁上的 F 及 F_B 作用点的相应位移分别为（见图 10-16b）

$$\delta_1=\frac{a^2}{6EI}(3l-a),\delta_2=\frac{l^3}{3EI}$$

第一组力在第二组力引起的位移上所做的功为

$$F\delta_1-F_B\delta_2=\frac{Fa^2}{6EI}(3l-a)-\frac{F_Bl^3}{3EI}$$

第一组力作用下，其右端 B 实际位移为零，所以第二组力在第一组力引起的位移上所做的功等于零。由功互等定理有

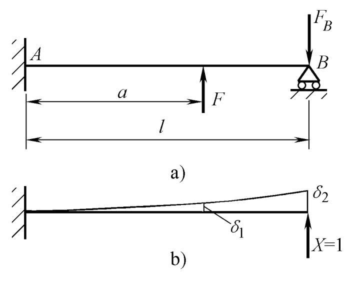


图 10-16　超静定梁

$$\frac{Fa^2}{6EI}(3l-a)-\frac{F_Bl^3}{3EI}=0$$

由此解得 $$F_B=\frac{F}{2}\frac{a^2}{l^3}(3l-a)$$

10.4 单位载荷法　莫尔积分

单位载荷法：通过在结构的某一点沿指定方向施加单位力（或力偶），通过莫尔积分求结构上此点沿指定方向上位移（或转角）的方法。

1. 莫尔积分推导

为了求图 10-17a 所示梁上 C 点在载荷 F_1、F_2、…、F_n 作用下的位移 Δ，可在 C 点假想先只有单位力 $F_0=1$ 作用（见图 10-17b），由线弹性材料应变能公式，得 F_0 作用的应变能为

$$\overline{U}=\int\frac{(\overline{M}(x))^2\mathrm{d}x}{2EI} \tag{a}$$

此后将 F_1、F_2、…、F_n 作用于梁（见图 10-17c），由于 F_1、F_2、…、F_n 作用的变形能为

$$U=\int_l\frac{M^2(x)\mathrm{d}x}{2EI} \tag{b}$$

这时，梁的总变形能为

$$U_1=U+\overline{U}+1\cdot\Delta \tag{c}$$

其中 $1\cdot\Delta$ 是因为已作用在梁上的单位力在 F_1、F_2、…、F_n 作用后引起的位移 Δ 上所做的功。

如果将 F_1、F_2、…、F_n 与 $F_0=1$ 共同作用（见图 10-17c），则梁内弯矩为 $M(x)+\overline{M}(x)$，此时应变能为

$$U_1=\int_l\frac{[M(x)+\overline{M}(x)]^2}{2EI}\mathrm{d}x \tag{d}$$

此两最后状态的应变能相等，故有

$$U+\overline{U}+1\cdot\Delta=\int_l\frac{[M(x)+\overline{M}(x)]^2}{2EI}\mathrm{d}x \tag{e}$$

比较以上诸式，不难得到

$$\Delta=\int_l\frac{M(x)\overline{M}(x)\mathrm{d}x}{EI} \tag{10-18}$$

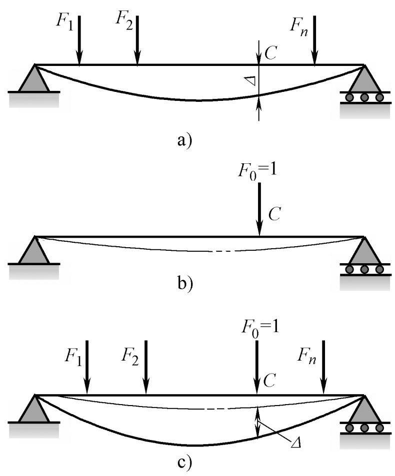


图 10-17　不同加载次序推导莫尔积分

2. 莫尔积分推广

仿照上述推导，受轴向拉伸（压缩）杆件结构中，某一杆的伸长（缩短）量 Δ 计算公式为

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{F_{\mathrm{N}i}\overline{F}_{\mathrm{N}i}}{(EA)_i}l_i \tag{10-19}$$

其中 $\overline{F}_{\mathrm{N}i}$表示在求伸长（缩短）量的截面，施加单位轴向力 $F_0=1$，引起杆件结构中第 i 个杆的内力。

而受扭轴在某截面的扭转角 Δ，其计算公式为

$$\Delta = \int_l \frac{T(x)\overline{T}(x)\,\mathrm{d}x}{GI_p} \tag{10-20}$$

其中 $\overline{T}(x)$ 表示在该截面施加单位扭矩 $M_0=1$，引起轴内的扭矩。

这些公式统称为莫尔定理，式中积分称为莫尔积分。从推导过程知，这些公式只适用于线弹性结构。当需要求两点之间的相对位移时，在 A、B 两点的连线方向上加一对方向相反的单位力，然后用单位载荷法计算，即可求得相对位移。因为这时的 $\Delta = 1\cdot\Delta_A + 1\cdot\Delta_B$，即是 A、B 两点的相对位移。同理，如需要求两截面相对转角，只要在两截面上加方向相反的一对单位力偶矩即可。当杆件结构发生组合变形时，求位移公式为

$$\Delta = \int_l \frac{M(x)\overline{M}(x)\,\mathrm{d}x}{EI} + \int_l \frac{T(x)\overline{T}(x)\,\mathrm{d}x}{GI_p} + \int_l \frac{F_N(x)\overline{F}_N(x)\,\mathrm{d}x}{EA} \tag{10-21}$$

使用莫尔积分的规则

使用莫尔积分应当注意在列出外载荷和单位载荷引起的内力方程时，必须保证三个一致性：

（1）外载荷内力方程和单位载荷内力方程分段数一致；

（2）每段内自变量的基准点一致；

（3）外载荷与单位载荷引起的内力的符号规定一致。

例 10-4　如图 10-18a 所示简支梁受均布载荷作用，梁的刚度为 EI，载荷集度为 q。试求中点 C 的垂直位移 Δ_y 和 B 点转角 θ_B。

解：（1）求约束力

$$F_A = F_B = \frac{ql}{2}$$

（2）求中点 C 的垂直位移 Δ_y，在中点 C 施加一个 y 方向单位力（见图 10-18b）。根据三个一致性要求，分为 AB 段和 BC 段。

AB 段单位力和原载荷引起的弯矩方程为

$$\left.\begin{aligned}\overline{M}(x_1) &= \frac{1}{2}x_1\\ \overline{M}(x_1) &= \frac{ql}{2}x_1 - \frac{q}{2}x_1^2\end{aligned}\right\} x_1 \in \left[0, \frac{l}{2}\right]$$

BC 段单位力和原载荷引起的弯矩方程为

$$\left.\begin{aligned}\overline{M}(x_2) &= \frac{1}{2}x_2\\ \overline{M}(x_2) &= \frac{ql}{2}x_2 - \frac{q}{2}x_2^2\end{aligned}\right\} x_2 \in \left[0, \frac{l}{2}\right]$$

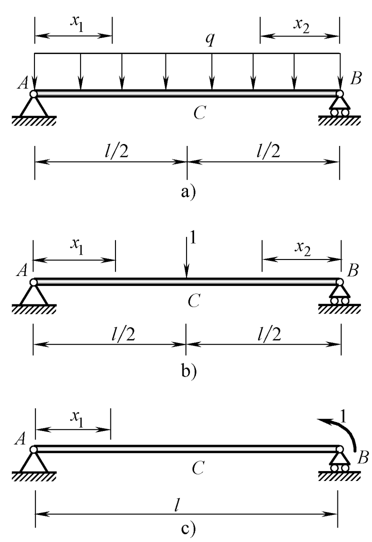


图　10-18

同一段的同一种内力相乘积分

$$\Delta_y = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{l}{2}} M(x_1)\overline{M}(x_1)\mathrm{d}x_1 + \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{l}{2}} M(x_2)\overline{M}(x_2)\mathrm{d}x_2 = \frac{2}{EI}\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{ql}{2}x_1 - \frac{q}{2}x_1^2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x_1\right)\mathrm{d}x_1 = \frac{5ql^4}{384EI}$$

（3）求 B 点转角 θ_B，在 B 点施加一个逆时针方向单位力偶（见图 10-18c）。此时，仅需要分为一段即 AB 段。

单位力和原载荷引起的弯矩方程为

$$\left.\begin{aligned}\overline{M}(x_1) &= \frac{1}{l}x_1\\ M(x_1) &= \frac{ql}{2}x_1 - \frac{q}{2}x_1^2\end{aligned}\right\} x_1 \in [0, l]$$

同一段的同一种内力相乘积分

$$\theta_B = \frac{1}{EI}\int_0^l M(x_1)\overline{M}(x_1)\mathrm{d}x_1 = \frac{1}{EI}\int_0^l\left(\frac{ql}{2}x_1 - \frac{q}{2}x_1^2\right)\cdot\left(\frac{1}{l}x_1\right)\mathrm{d}x_1$$
$$= \frac{ql^3}{24EI}$$

例 10-5 如图 10-19a 所示，一个半径为 R 的水平开口圆环，弯曲刚度 EI 为常量。在上、下顶点作用一对力 F，求 A、B 两点之间相对位移 Δ_{AB}。

解：在 A、B 两点的连线方向上加一对方向相反的单位力（见图 10-19b），然后用单位载荷法计算。

根据几何对称性，仅计算一半即可。按分段的要求，开口圆环需要分两段表示内力，可用圆心角 φ_1 和 φ_2 来分别表示。

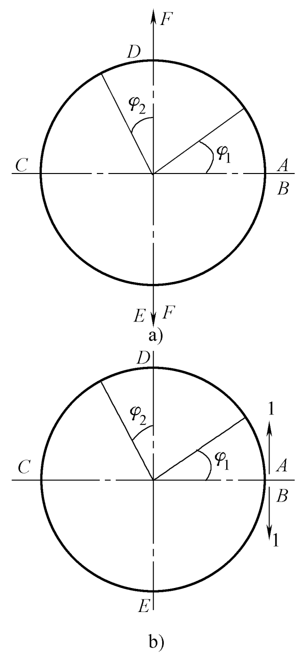


图 10-19

AD 段单位力和原载荷引起的弯矩方程为

$$\left.\begin{aligned}\overline{M}(\varphi_1) &= R(1-\cos\varphi_1)\\ M(\varphi_1) &= 0\end{aligned}\right\} \quad \varphi_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

DC 段单位力和原载荷引起的弯矩方程为

$$\left.\begin{aligned}\overline{M}(\varphi_2) &= R(1+\sin\varphi_2)\\ M(\varphi_2) &= FR\sin\varphi_2\end{aligned}\right\} \quad \varphi_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

同一段的同一种内力相乘积分，得

$$\Delta_{AB} = 0 + 2\int_0^{\pi/2}\frac{M(\varphi_2)\overline{M}(\varphi_2)}{EI}R\mathrm{d}\varphi_2 = 2\int_0^{\pi/2}\frac{FR^3(\sin\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)}{EI}\mathrm{d}\varphi_2 = \frac{2FR^3}{EI}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$$

例 10-6 轴线为半圆形平面曲杆如图 10-20a 所示。作用于 A 点的集中力 F 垂直于轴线所在平面，求 F 力作用点的垂直位移 Δ_y。

解：杆的任一截面 m—n 位置可用圆心角 φ 来表示。

曲杆在 F 力作用下（见图 10-20a），m—n 截面上有弯矩与扭矩（见图 10-20b）为

$$\left.\begin{aligned}M(\varphi) &= FR\sin\varphi\\ T(\varphi) &= FR(1-\cos\varphi)\end{aligned}\right\} \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

曲杆在单位力作用下（见图 10-21a），m—n 截面上有弯矩与扭矩（见图 10-21b）为

$$\left.\begin{aligned}\overline{M}(\varphi)&=R\sin\varphi\\ \overline{T}(\varphi)&=R(1-\cos\varphi)\end{aligned}\right\}\quad \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

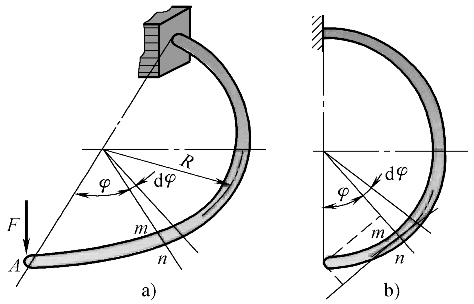


图 10-20　平面曲杆受外力作用

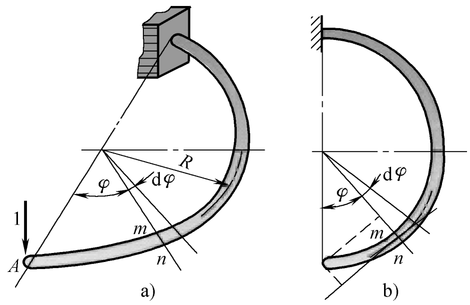


图 10-21　平面曲杆受单位力作用

对于截面尺寸远小于半径 R 的曲杆（常称小曲率曲杆），可按直杆莫尔积分计算变形，即

$$\begin{aligned}\Delta_y&=\int_0^{\pi}\frac{M(\varphi)\overline{M}(\varphi)}{EI}R\mathrm{d}\varphi+\int_0^{\pi}\frac{T(\varphi)\overline{T}(\varphi)}{GI_{\mathrm{p}}}R\mathrm{d}\varphi\\&=\int_0^{\pi}\frac{FR^2\sin^2\varphi}{EI}\mathrm{d}\varphi+\int_0^{\pi}\frac{FR^2(1-\cos\varphi)^2}{GI_{\mathrm{p}}}\mathrm{d}\varphi=\frac{FR^3\pi}{2EI}+\frac{3FR^3\pi}{2GI_{\mathrm{p}}}\end{aligned}$$

10.5 计算莫尔积分的图乘法

莫尔积分式（10-18）中的 EI 或式（10-20）中的 GI_{p} 为常量，可提到积分号外，只需计算积分：

$$\int_l M(x)\overline{M}(x)\,\mathrm{d}x \tag{a}$$

$M(x)$、$\overline{M}(x)$ 如有一个是 x 的线性函数，即可采用图乘法简化积分计算。

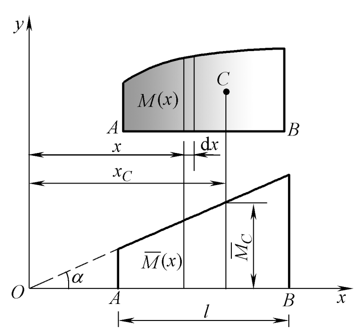


图 10-22　图乘法

图 10-22 表示直杆 AB 的 $M(x)$ 图与 $\overline{M}(x)$ 图，其中 $\overline{M}(x)$ 可用直线式表达：

$$\overline{M}(x)=x\cdot\tan\alpha \tag{b}$$

则莫尔积分可写成：

$$\int_l M(x)\overline{M}(x)\,\mathrm{d}x=\tan\alpha\int_l xM(x)\,\mathrm{d}x \tag{c}$$

右边积分中，$M(x)\mathrm{d}x$ 为微面积，整个积分为 $M(x)$ 所

围面积 ω 对 y 轴的静矩，若 x_C 为 $M(x)$ 面积的形心到 y 轴的距离，则

$$\int xM(x)\,\mathrm{d}x = x_C\omega \tag{d}$$

于是，

$$\int_l M(x)\overline{M}(x)\,\mathrm{d}x = \tan\alpha \cdot x_C \cdot \omega = \omega \cdot \overline{M}_C \tag{e}$$

其中 $\overline{M}_C$ 是 $\overline{M}(x)$ 图中与 $M(x)$ 图的形心 C 所对应的纵坐标，故式（e）可写成

$$\int_l \frac{M(x)\overline{M}(x)}{EI}\mathrm{d}x = \frac{\omega \cdot \overline{M}_C}{EI} \tag{10-22}$$

这就是计算莫尔积分的图乘法。

常用的几种图形的面积及形心位置计算公式如图 10-23 所示。使用式（10-22）时，为了计算方便，可将弯矩分解成几部分，对每一部分使用图 10-23 所示的标准图形叠加求和。有时 $M(x)$ 为连续光滑曲线，而 $\overline{M}(x)$ 图为折线，则应以折线的转折点为界，将积分分成几段，逐段使用图乘法，然后求和。

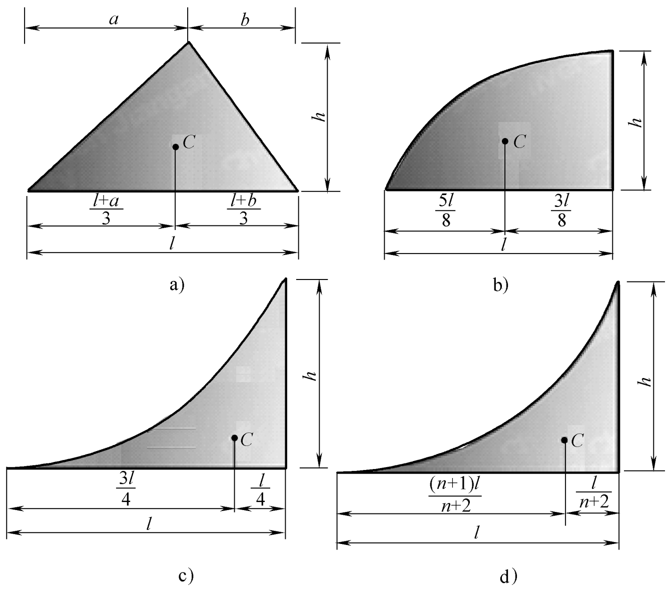


图 10-23 常用图形的参数

a）三角形 $\omega=\frac{lh}{2}$ b）二次抛物线 $\omega=\frac{2}{3}lh$

c）二次抛物线 $\omega=\frac{1}{3}lh$ d）n 次抛物线 $\omega=\frac{1}{n+1}lh$

应用图乘法的注意事项

1）$\omega \cdot \overline{M}_C$ 有正负号：原载荷与单位载荷引起的内力图在轴的同侧，为正；原载荷与单位载荷引起的内力图在轴的异侧，为负。

2）当 $M(x)$ 为一条光滑的曲线，而 $\overline{M}(x)$ 为一条折线时，必须以折点为界，分段图乘。

$$\Delta = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_i \cdot \overline{M}_{Ci}}{EI} \qquad (10\text{-}23)$$

3）若梁的抗弯刚度 EI 在整个梁上呈阶梯变化，则图乘时也要分段。

4）当 $M(x)$ 图很复杂时，可以将 $M(x)$ 分成若干个简单图形，分部分图乘。

5）图乘时，只有对同一段梁上的同一种内力才能互乘。

例 10-7　均布载荷作用下简支梁如图 10-24a 所示，EI 为已知常量，试求跨度中点 C 的挠度 v_C。

解：简支梁受均布载荷作用弯矩图为二次抛物线（见图 10-24b），求中点挠度时，单位载荷作用于中点，故单位载荷的弯矩图为一折线（见图 10-24d）。用图乘法时应分为两段，以 $\overline{M}(x)$ 折点为界。AC、CB 两段弯矩图的面积 ω_1、ω_2 为

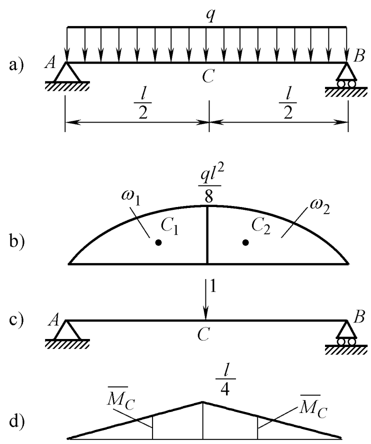


图 10-24　均布载荷简支梁

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{24}ql^3$$

ω_1、ω_2的形心 C_1、C_2所对应的 $\overline{M}(x)$ 图的纵坐标为

$$\overline{M}_{C_1} = \overline{M}_{C_2} = \frac{5}{8} \cdot \frac{l}{4} = \frac{5}{32}l$$

按图乘法，跨中挠度为

$$v_C = \frac{\omega_1 \overline{M}_{C_1}}{EI} + \frac{\omega_2 \overline{M}_{C_2}}{EI} = 2 \cdot \frac{1}{EI}\frac{ql^3}{24} \cdot \frac{5l}{32} = \frac{5ql^4}{384}。$$

例 10-8　外伸梁如图 10-25a 所示，EI 为常量，试求外伸端点 C 的挠度 v_C。

解：求 C 点的挠度时，单位载荷作用于 C 点（见图 10-25b），故单位载荷的弯矩图为两段折线（见图 10-25d）。用图乘法时，按弯矩可以叠加的原理作弯矩图应分为三段，以 $\overline{M}(x)$ 折点为界。各段弯矩图的面积 ω_1、ω_2、ω_3 为

$$\omega_1 = -\frac{a}{2}Fa = -\frac{Fa^2}{2},\ \overline{M}_{C1} = -\frac{2a}{3}$$

$$\omega_2 = -\frac{2a}{2}Fa = -Fa^2,\ \overline{M}_{C2} = -\frac{2a}{3}$$

$$\omega_3 = \frac{2a}{2}\frac{Fa}{2} = \frac{Fa^2}{2},\ \overline{M}_{C3} = -\frac{a}{2}$$

$$\begin{aligned} v_C &= \frac{1}{EI}(\omega_1 \overline{M}_{C1} + \omega_2 \overline{M}_{C2} + \omega_3 \overline{M}_{C3}) \\ &= \frac{1}{EI}\left(\frac{Fa^2}{2} \times \frac{2a}{3} + Fa^2 \times \frac{2a}{3} + \frac{Fa^2}{2} \times \frac{-a}{2}\right) \\ &= \frac{Fa^3}{EI}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3Fa^3}{4EI}\ (\downarrow) \end{aligned}$$

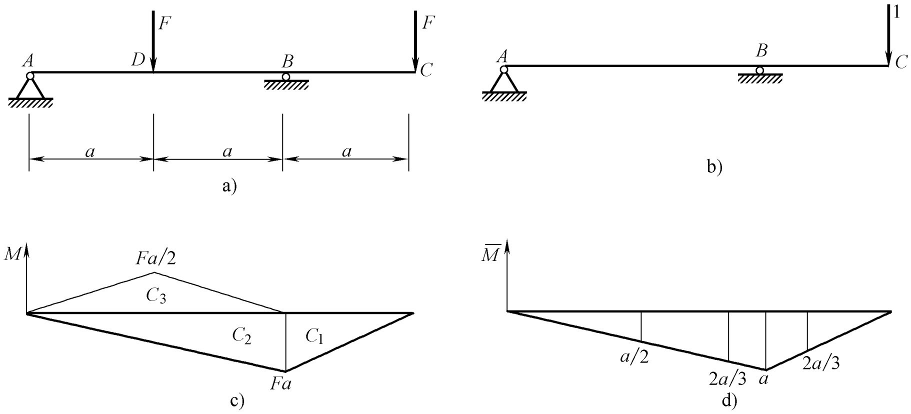


图 10-25　用图乘法分段求解内力图值

本章小结

1. 能量守恒

受载荷作用的变形体，根据能量守恒原理，固体的变形能 U 在数值上等于外力所做的功 W，即 $U=W$。弹性体的变形能是可逆的，超出了弹性范围，塑性变形将消耗一部分能量，变形能不能全部转变为功。

2. 线弹性材料杆件变形能

（1）拉、压杆　轴力为常量时，$U=W=\dfrac{1}{2}F\Delta l=\dfrac{F^2 l}{2EA}$

轴力为变量时　$U=\int_l \dfrac{F_N^2(x)\,\mathrm{d}x}{2EA}$

单位体积变形能　$u=\dfrac{1}{2}\sigma\varepsilon=\dfrac{\sigma^2}{2E}$

（2）纯剪切　比能　$u=\dfrac{1}{2}\tau\varepsilon=\dfrac{\tau^2}{2G}$

（3）扭转　扭矩沿轴向为常量时，$U=W=\dfrac{1}{2}M\varphi=\dfrac{M^2 l}{2GI_p}$

扭矩沿轴向为变量时，$U=\int_l \dfrac{T^2(x)\,\mathrm{d}x}{2GI_p}$

（4）弯曲　纯弯曲时，$U=W=\dfrac{1}{2}M\theta=\dfrac{M^2 l}{2EI}$

弯矩沿轴线是变量时，$U=\int_l \dfrac{M^2(x)\,\mathrm{d}x}{2EI}$

3. 线弹性材料杆件变形能普遍表达式

$$U = \int_l \frac{F_N^2(x)\,dx}{2EA} + \int_l \frac{M^2(x)\,dx}{2EI} + \int_l \frac{T^2(x)\,dx}{2GI_p}$$

4. 几个重要定理

（1）功互等定理　对于线弹性体，若每一组力只有一个力，在同一构件上第一组力在第二组力引起的位移上所做的功，等于第二组力在第一组力引起的位移上所做的功，即$F_1\Delta_{12}=F_2\Delta_{21}$。若一组力由多个力组成，则第一组广义力｛$F_1$，$F_2$，…，$F_m$｝在第二组广义力｛$Q_1$，$Q_2$，…，$Q_n$｝作用点处沿第二组广义力作用方向引起的广义位移为｛Δ_{Q_1}，Δ_{Q_2}，…，Δ_{Q_n}｝，而｛Δ_{F_1}，Δ_{F_2}，…，Δ_{F_m}｝则表示第二组广义力在第一组广义力作用点处沿第一组广义力作用方向引起的广义位移，此时功互等定理的一般形式为

$$F_1\Delta_{F_1}+F_2\Delta_{F_2}+\cdots+F_m\Delta_{F_m}=Q_1\Delta_{Q_1}+Q_1\Delta_{Q_2}+\cdots+Q_n\Delta_{Q_n}$$

（2）位移互等定理　在功互等定理中，若只有两个力F_i、Q_j，且$F_i=Q_j$，此刻由功互等定理得：$\Delta_{F_i}=\Delta_{Q_j}$。即$F_i$作用点沿$F_i$方向因作用有$Q_j$而引起的位移$\Delta_{F_i}=\delta_{ij}$，等于$Q_j$作用点沿$Q_j$方向因作用有$F_i$而引起的位移$\Delta_{Q_j}=\delta_{ji}$。一般的表达式为：$\delta_{ij}=\delta_{ji}$。

5. 单位载荷法、莫尔积分

若要求外力作用下结构上指定点指定方向的位移Δ，可以在该点该方向上加一单位力，则有

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n}\int_l \frac{F_{Ni}(x)\,\overline{F}_{Ni}(x)\,dx}{(EA)_i} + \sum_{i=1}^{n}\int_l \frac{M_i(x)\,\overline{M}_i(x)\,dx}{(EI)_i} + \sum_{i=1}^{n}\int_l \frac{T_i(x)\,\overline{T}_i(x)\,dx}{(GI_p)_i}$$

其中$M_i(x)$、$F_{Ni}(x)$、$T_i(x)$是受力结构的实际弯矩、轴力、扭矩，而$\overline{M}_i(x)$、$\overline{F}_{Ni}(x)$、$\overline{T}_i(x)$是结构只受该单位力时所引起的弯矩、轴力、扭矩。此式又叫作莫尔积分。

6. 计算莫尔积分的图乘法

当莫尔积分$\Delta=\dfrac{1}{EI}\int_l M(x)\overline{M}(x)\,dx$中，如$M(x)$或$\overline{M}(x)$是$x$的线性函数时，例如$\overline{M}(x)$是线性函数，则上式可写成$\Delta=\dfrac{\omega\,\overline{M}_C}{EI}$，其中$\omega$是$M(x)$与横坐标所围成的面积，$\overline{M}_C$是$M(x)$图形面积的形心所对应的$\overline{M}(x)$图的纵坐标值，这就是求莫尔积分的图乘法。

思　考　题

10-1　两悬臂梁，假设未施加载荷前BD之间的距离为Δ_{BD}，CE之间的距离为Δ_{CE}，则施加载荷F后，________。

（A）Δ_{BD}增大，Δ_{CE}不变；

（B）Δ_{BD}增大，Δ_{CE}改变；

（C）Δ_{BD}减小，Δ_{CE}不变；

（D）Δ_{BD}减小，Δ_{CE}改变。

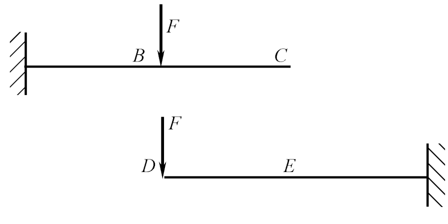


图 10-26　思考题 10-1 图

10-2　如图 10-27 所示，一细长曲杆AB位于水平面

内，其轴线为半径为 R 的四分之一圆，A 点固定，B 点自由，F 铅直作用于 B 端，抗弯刚度 EI、抗扭刚度 GI_p 已知为常数。当求 B 端的扭转角 φ_{Bx} 时，应如何建立单位载荷系统？________

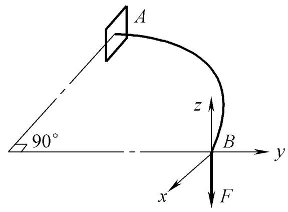
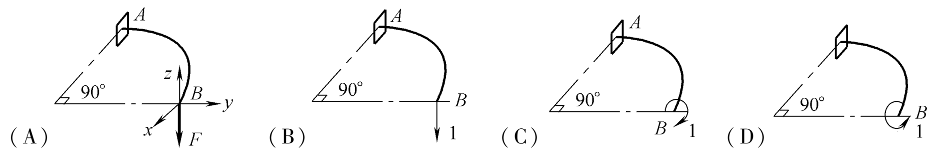


图 10-27　思考题 10-2 图



10-3　采用单位力法求位移时。欲求哪点哪个方向位移，则在此点此方向上加单位载荷（广义力）。求得的值与单位载荷作用方向相对应，如计算结果为正值，表示________。

（A）实际位移与单位载荷方向一致；

（B）实际位移与单位载荷方向相反；

（C）实际位移与单位载荷方向无关；

（D）以上都不对。

10-4　简单桁架受力如图 10-28 所示，各杆 EA 相同，当求结点 A 与 D 的相对位移 Δ_{AD} 时，应如何建立单位载荷系统？________

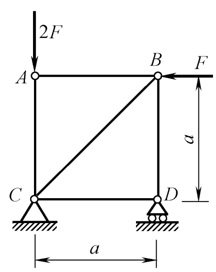
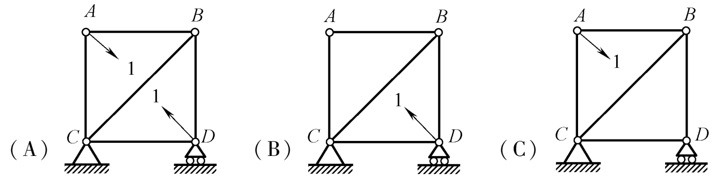


图 10-28　思考题 10-4 图



（D）以上都不是。

10-5　当单位载荷法用于线性系统时，在________的情况下，可利用内力图形互乘法来简化积分计算。________

（A）只有单位载荷系统的内力函数为线性；

（B）只有实际系统内力函数为线性；

（C）单位载荷系统的内力函数为线性或实际系统内力函数为线性；

（D）以上都不是。

10-6　判断正误

（1）功互等定理因用到叠加原理，因此只适用于线弹性材料。（　　）

（2）按照定义，功 $\int_{\Delta} P \cdot \mathrm{d}\Delta$ 和余功 $W_c = \int_{P} \Delta \cdot \mathrm{d}P$ 都具有物理中明确的物理意义。（　　）

（3）变形能等于外力所做的变形功，外力做功转化为储存于变形体的势能，对于任何物体，当外载卸去时，储存的势能将以做功的形式完全释放出来。（　　）

习　题

10-1　计算图 10-29 所示梁的变形能。

10-2　如图 10-30 所示，在外伸梁的自由端作用力偶矩 M，试用互等定理求跨度中点 C 的挠度 v_C。

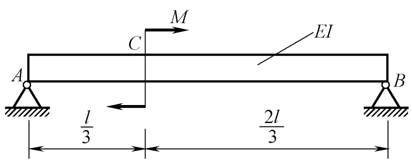


图 10-29　题 10-1 图

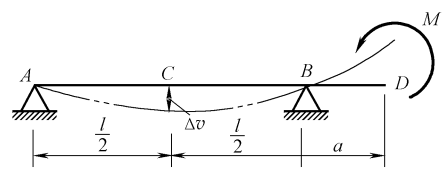


图 10-30　题 10-2 图

10-3　图 10-31 所示刚架的各杆的 EI 皆相等，试用莫尔定理求 A 截面的垂直位移和 C 截面的转角。

10-4　计算图 10-32 所示各杆或桁架的变形能。

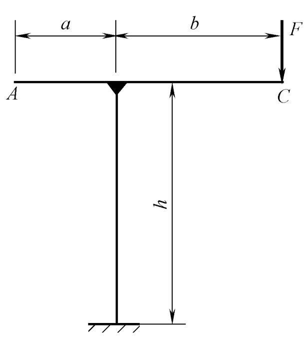


图 10-31　题 10-3 图

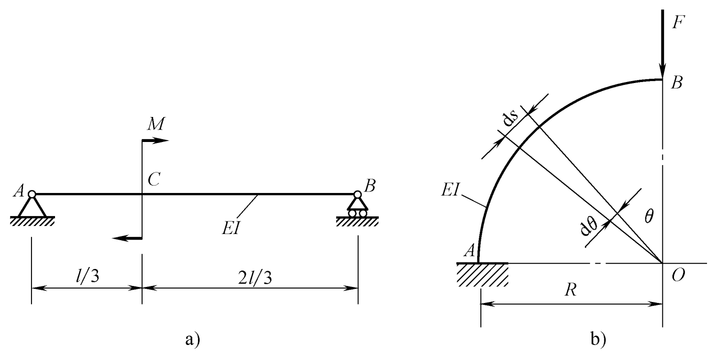


图 10-32　题 10-4 图

10-5　如图 10-33 所示，传动轴的抗弯刚度为 EI，抗扭刚度为 GI_p。带拉力 $F_T + F'_T = F$，$D = 2d$。试计算轴的变形能。设 $a = l/4$。

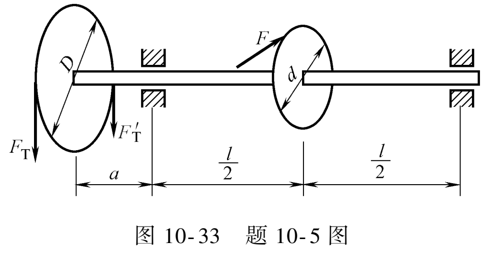


图 10-33　题 10-5 图

10-6　试用互等定理求图 10-34 所示跨度中点 C 的挠度，设 EI 为常量。

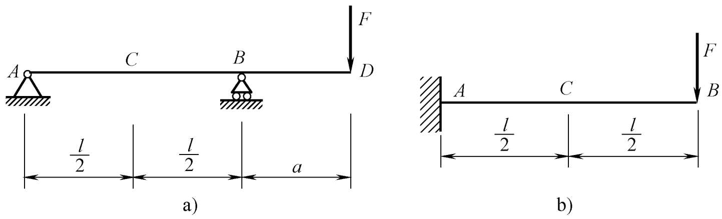


图 10-34　题 10-6 图

10-7　试求图 10-35 所示梁截面 B 的挠度和转角。

10-8　图 10-36 所示刚架，已知 AC 和 CD 两部分的 $I=30\times10^{-6}\mathrm{m}^4$，$E=200\mathrm{GPa}$。试求截面 D 的水平位移和转角，若 $F=10\mathrm{kN}$，$l=1\mathrm{m}$。

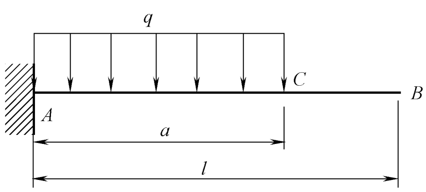


图 10-35　题 10-7 图

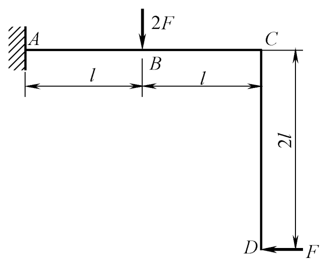


图 10-36　题 10-8 图

10-9　图 10-37 所示桁架各杆的材料相同，截面积相等，在载荷 F 作用下，试求结点 B 与 D 间的相对位移。

10-10　图 10-38 所示简易起重机的撑杆 AC 长为 2m，截面的惯性矩 $I=8.53\times10^6\mathrm{mm}^4$。拉杆 BD 的 $A=600\mathrm{mm}^2$。$F=2.83\mathrm{kN}$。如撑杆只考虑弯曲影响，试求 C 点的垂直位移，设 $E=200\mathrm{GPa}$。

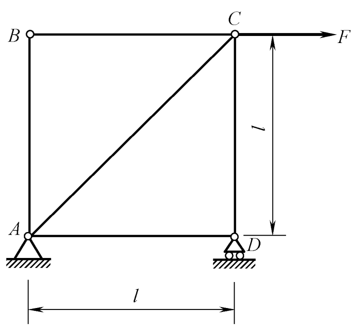


图 10-37　题 10-9 图

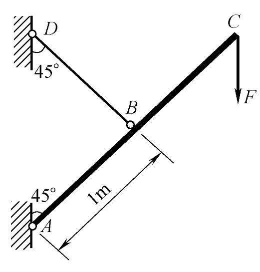


图 10-38　题 10-10 图

10-11　Z 形平面刚架如图 10-39 所示。刚架各部分截面相同，试求截面 A 的转角。

10-12　如图 10-40 所示，开口圆环，EI 为常量，求 AB 之间的相对水平位移和相对转角。

10-13　在直角曲拐的端点 C 上作用集中力 F，如图 10-41 所示。设曲拐各部分的 EI 和 GI_p 均为常量。试用莫尔定理求 C 端的垂直位移。

10-14　如图 10-42 所示，平均半径为 R 的细圆环，截面为圆形，直径为 D。两个力 F 垂直于圆环轴线所在的平面。试求两个力 F 作用点的相对位移。

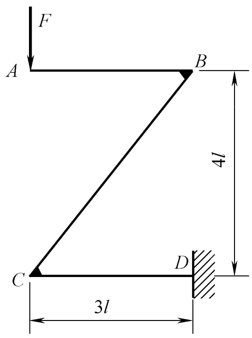


图 10-39　题 10-11 图

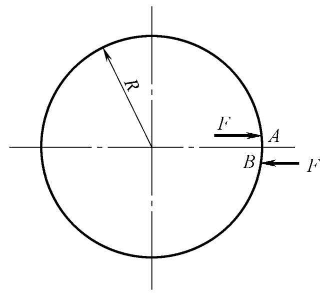


图 10-40　题 10-12 图

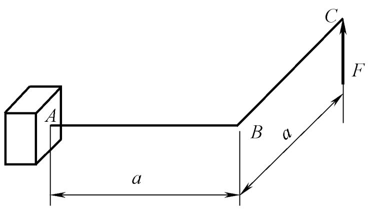


图 10-41　题 10-13 图

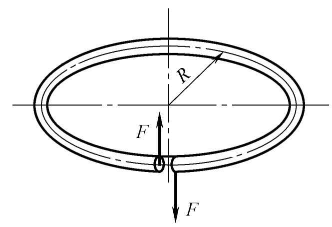


图 10-42　题 10-14 图

10-15　一根开口环如图 10-43 所示，在 *A*、*B* 两点作用一对共线力 *F*，全梁 *EI* 为常数。试用莫尔定理求开口环 *C*、*D* 两点之间的相对位移（不计轴力的影响）。

10-16　如图 10-44 所示平面曲梁，*A* 端固定，沿全梁 *EI* 为常量。*C* 端作用一集中力 *F*，仅考虑弯矩，试用莫尔定理求 *C* 端的铅垂位移和水平位移。

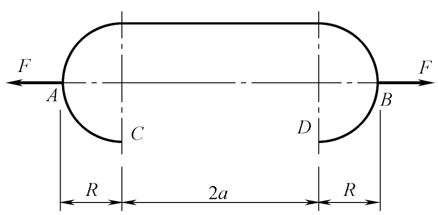


图 10-43　题 10-15 图

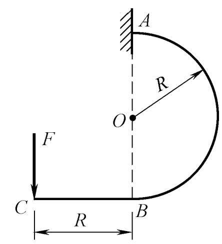


图 10-44　题 10-16 图

10-17　平面刚架在 *A*、*B* 两点作用一对共线力 *F*，各部分的 *EI* 为常量，如图 10-45 所示。试用莫尔定理求 *A*、*B* 两点之间的相对位移。

10-18　图 10-46 所示示直角刚架在 *A*、*C* 两点有外力 *F* 作用。各部分的 *EI* 和 GI_p 均为常量。试用图乘法求 *A*、*C* 两点的水平位移。

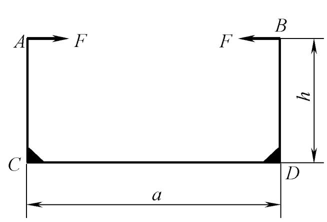


图 10-45　题 10-17 图

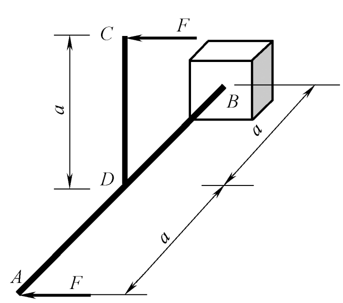


图 10-46　题 10-18 图

第 11 章 超静定结构

内容梗概：用静力平衡方程无法确定全部约束力和内力的结构，统称为超静定结构。如果结构外部约束力的数目大于结构整体的独立静力平衡方程数目，则称外力超静定问题。当载荷与外约束力都已知，而所有内力不能用截面法通过平衡方程确定的结构，称为内力超静定问题。解除超静定系统的多余约束且以相应的约束力代替，则使超静定系统变成为基本静定系（又叫作静定基）。静定基有不同选择，同一问题可以有多种不同选择。以“多余未知力”为基本未知量，求解超静定系统的方法，称为力法。解超静定问题，必须补充足够的方程，才能求出全部未知力。m 次超静定有 m 个多余未知力 X_1、X_2、…、X_m，需要 m 个补充方程，这些方程描述在多余未知力处的变形协调条件，称为正则方程。一次超静定问题的力法正则方程形式为 $\delta_{11}X_1+\Delta_{1F}=0$。其中 X_1 是未知的广义力，δ_{11} 和 Δ_{1F} 可以用莫尔积分来求得。

11.1 超静定结构概述

1. 定义

工程设计中，为了提高结构的刚度或强度，往往在静定结构上增加多余约束，使得结构的约束反力数大于结构独立的静力平衡方程数。这种用静力平衡方程无法确定全部约束力和内力的结构，统称为超静定结构。

2. 静定结构与超静定结构

图 11-1a 所示为平面刚架，在 A、B 处的三个约束力可以通过静力平衡方程求出。这样在任意截面（例如图 11-1b 中 C 截面）上的三个内力也完全可以通过静力平衡方程求出，就是静定结构。现增加一个二力杆 EF 如图 11-1c 所示，此时 D 截面又出现一个内力（见图 11-1d），现总共四个内力，而平衡方程仍然是三个，这样就产生了一个多余内力不能由静力平衡方程解出。进一步地，如图 11-1e 所示，加 EF 杆后形成一个封闭平面刚架结构，现在有六个内力（见图 11-1f），有三个多余内力不能由静力平衡方程解出。像这种结构，仅用平衡方程不能解出全部内力，就是超静定结构。

研究超静定问题时应注意约束力与杆件内力均是未知力。如果结构外部约束力的数目大于结构整体的独立静力平衡方程数目，则称外力超静定结构，如图 11-2 所示。当载荷与外约束力都已知，而所有内力不能用截面法通过平衡方程确定的结构，称为内力超静定结构。如图 11-3 所示。对于内、外力超静定兼而有之的结构，则称为混合超静定结构。如图11-4

所示。

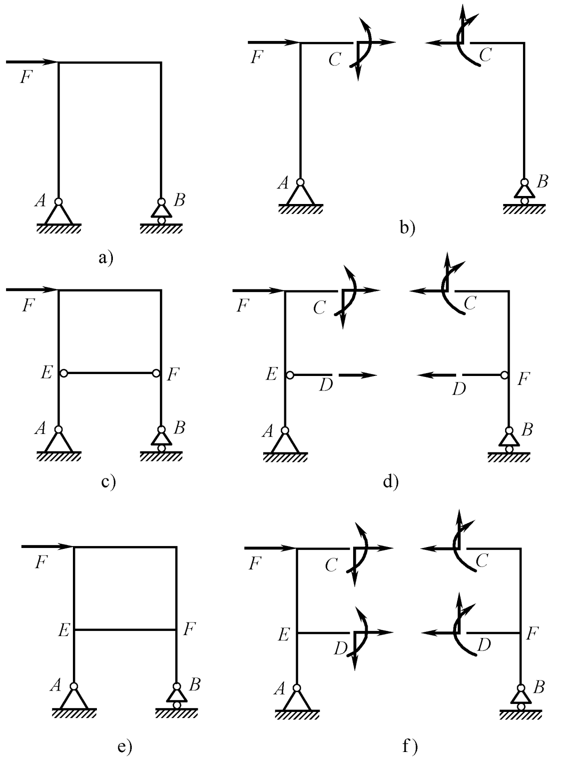


图 11-1　平面超静定结构及其多余约束力

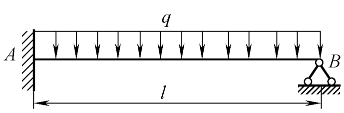


图 11-2　超静定架

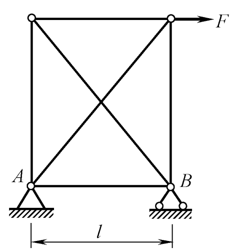


图 11-3　超静定桁架

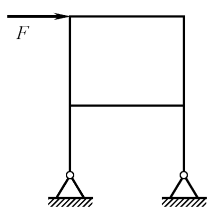


图 11-4　超静定框架

超静定结构的主要性质：

1）仅由平衡条件不能确定所有未知力，还需考察变形条件，补充变形协调方程；

2）其受力情况与材料的物理性质、截面的几何性质有关；

3）因制造误差、支座移动、温度改变等原因，超静定结构能够产生内力。

3. 超静定次数确定

外约束力总数与杆件内力总数之和与独立静力平衡方程总数之差即为超静定次数。

（1）外力超静定次数判断　根据结构与受力性质，确定结构是空间或是平面承载结构，即可确定全部约束的个数。根据作用力的类型，可确定独立平衡方程数，二者之差为超静定次数。例如，图 11-2 所示平面悬臂梁在 B 端增加了一个滚动铰链约束，是一次外力超静定

结构。

（2） 内力超静定次数确定

桁架：直杆用铰相连接，载荷只作用于结点，杆只受拉压力的杆系，其基本几何不变系由三杆组成是静定系，而图 11-3 由于在基本系中增加了一约束杆，因而是一次内力超静定结构。同理，图 11-1c 所示也是一次内力超静定结构。

刚架：杆以刚结点相连接，各杆可以承受拉、压、弯曲和扭转，这样的杆系为刚架（见图 11-1e）。对于这个闭口框架，则需用截面法切开一个切口使其变为静定结构（几何不变可承载结构），其截面上作为平面受力结构（见图 11-1f），出现三个内力（轴力 F_N、弯矩 M、剪力 F_S），为三次超静定结构。对于平面结构，则每增加一个闭合框架，结构超静定次数便增加 3 次。一个平面受力闭合圆环与之类似，也是三次超静定结构。

（3） 混合超静定次数确定

先判断外力超静定次数，后判断内力超静定次数，二者之和为结构超静定次数。如图 11-4 所示，平面刚架具有一次外力超静定和三次内力超静定。因此，该平面刚架的混合超静定次数为四次。

结构的超静定次数也可以采用撤去多余约束使超静定结构成为静定结构的方法来确定。即，如果从原结构中去掉 n 个约束，结构就变为静定结构，则称原结构为 n 次超静定结构。撤去多余约束的一般原则为：

1） 撤去一根支杆或切断一根链杆，相当于拆掉一个（位移）约束。

2） 将一个固定端支座改为固定铰支座或在连续杆上加一个中间连接铰，相当于拆掉一个（转动）约束。

3） 撤去一个固定铰支座或撤去一个连接铰，相当于拆掉两个（位移）约束。

4. 基本静定系（静定基）、相当系统

解除超静定结构的多余约束并代之以相应的约束力，这样的结构形式称为原超静定结构的基本静定系（简称静定基）。静定基的选择并不唯一，可根据方便来选取。在静定基上加上外载荷以及多余约束力的系统称为超静定问题的相当系统。

应当注意，对于同一个超静定结构，由于多余约束选择的不同，相应的基本静定系的形式既可以是外力超静定也可以是内力超静定。如果选择结构的外部约束作为多余约束，解除该约束后，在解除约束处，用一个相应的约束力代替，形成外力超静定相当系统。如果选择结构的内部约束作为多余约束，解除该约束后，应当在解除约束处，施加一对相应的内力或内力偶。（内力必须大小相等，方向相反，作用于同一直线；内力偶必须大小相等，转向相反，作用在同一平面），形成内力超静定相当系统。例如，如图 11-5a 所示，平面曲梁在 A 端和 B 端有固定铰链约束，是一次超静定结构。如果选择 B 端水平方向约束为多余约束，

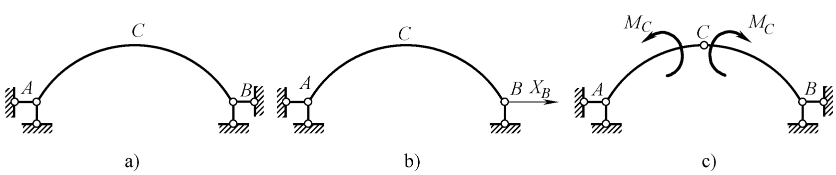


图 11-5　一次内力超静定拱及其相当系统

解除该约束后，用一个水平约束力 X_B 代替，形成外力一次超静定相当系统（见图 11-5b）。如果选择中部 C 截面的内部转动约束作为多余约束，将梁中部 C 截断并用一个中间连接铰链连接，再附加一对内部约束力偶 M_C，则形成内力一次超静定相当系统（见图 11-5c）。

11.2 用力法解超静定结构

1. 力法的概念

力法：以多余约束力为基本未知量，将变形或位移表示为未知力的函数，通过变形协调条件作为补充方程来求解未知约束力，这种方法称为力法。

2. 力法的基本思路

图 11-6a 所示为一根悬臂梁在 B 端有滚动铰链约束，梁受到均布载荷 q 作用。解除 B 端约束，加上多余约束支座约束力 X_1，形成基本静定基。多余约束支座约束力及外载荷 F 组成相当系统（见图 11-6b）。现求解相当系统中的未知多余约束力 X_1。在均布载荷 q 和多余约束力 X_1 作用下，悬臂梁的 B 端位移为

$$\Delta_1=\Delta_{1F}+\Delta_{11}=0 \tag{11-1}$$

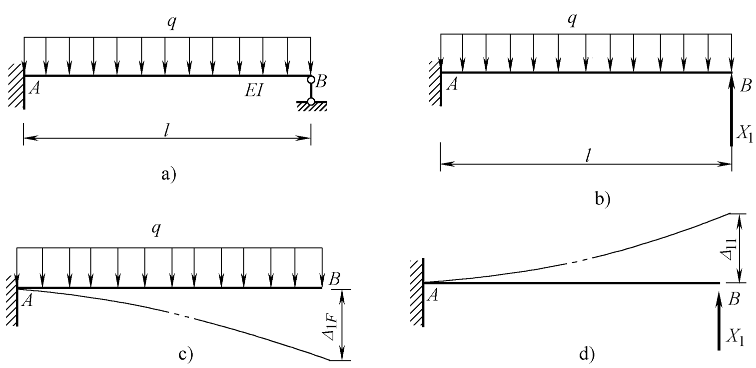


图 11-6　用变形比较法求超表定梁

其中 Δ_{1F}是由于全部外载荷（此处为均布载荷 q）引起的 B 点在 X_1 方向的位移（见图 11-6c），而 Δ_{11}是由多余约束力 X_1 引起的在 B 点沿 X_1 方向的位移（见图 11-6d）。因原系统 B 端是铰支座，在 X_1 方向上不应有位移，与原系统比较知，相当系统的 B 点的位移应为零。这就是变形协调方程，即得到一个补充方程。在计算 Δ_{11}时，可在静定基上沿 X_1 方向作用单位力 1，B 点沿 X_1 方向单位力引起的位移为 δ_{11}，对线弹性结构应有比例关系：

$$\Delta_{11}=\delta_{11}X_1 \tag{11-2}$$

将式（11-2）代入式（11-1）有

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1F}=0 \tag{11-3}$$

式（11-3）就是变形协调方程，称为一次超静定问题的力法正则方程。其中 δ_{11} 与 Δ_{1F}可用莫尔积分

$$\delta_{11}=\int_l \frac{\overline{M(x)}\cdot\overline{M(x)}\,\mathrm{d}x}{EI},\Delta_{1F}=\int_l \frac{M(x)\cdot\overline{M(x)}\,\mathrm{d}x}{EI}$$

或查表求得。所以本例中，

$$\delta_{11}=\frac{l^3}{3EI},\Delta_{1F}=-\frac{ql^4}{8EI}$$

由变形协调方程（11-3）可解得

$$X_1=-\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}}=\frac{3ql}{8}$$

求得 X_1 后，则可解出相当系统所有内力、位移。此相当系统的解即为原系统的解。

3. n 次超静定的正则方程

可将上述思想推广到 n 次超静定系统，如解除 n 个多余约束后的未知多余约束力为 X_j（$j=1$，2，…，n），它们将引起 X_i 作用点的相应的位移为 $\sum_{j=1}^{n}\Delta_{ij}$，而原系统由于 X_j($j=1$，2，…，n）与外载荷共同作用对此位移限制为零（或已知），故有

$$\begin{cases}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\cdots+\delta_{1n}X_n+\Delta_{1F}=0\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\cdots+\delta_{2n}X_n+\Delta_{2F}=0\\ \vdots\\ \delta_{n1}X_1+\delta_{n2}X_2+\cdots+\delta_{nn}X_n+\Delta_{nF}=0\end{cases}\tag{11-4}$$

根据位移互等定理有

$$\delta_{ij}=\delta_{ji}\tag{11-5}$$

δ_{ij}称为柔度系数，是在 X_i 作用点处，由单位力（或单位力偶）$X_j=1$ 引起，沿 X_j 方向的相应位移。Δ_{iF}是全部外载荷引起，在 X_i 作用点处，沿 X_i 方向的相应位移。式（11-4）称为 n 次超静定的力法正则方程，它们是对应于 n 个多余未知力 X_i 的变形协调条件，是求解超静定问题的补充方程。

4. 求解超静定问题的步骤

1）对某具体问题判断其为静定还是超静定结构，如为后者，确定是外超静定，还是内超静定，进而确定超静定次数。

2）适当选择静定基和相当系统。

3）比较相当系统与原超静定系统，得到多余约束处的变形协调条件，作为补充方程即正则方程。

4）求解正则方程，解出多余约束力，结合静力平衡方程，求出全部约束力及内力。

5）按要求做进一步的强度或刚度计算。

5. 超静定系统的特点

与静定系统相比，超静定系统有以下特点：

1）系统中各部分内力分配与该系统组成部分的相对刚度有关；

2）温度的变化、各构件加工尺寸的误差，装配时或者支座沉降时会引起温度应力、装配应力或初应力。

例 11-1 图 11-7a 所示的四分之一圆弧曲杆，若抗弯刚度 EI 为常量，$\alpha=\frac{\pi}{4}$，F、R 均已知，试以 B 端支座为多余约束，求其约束力。

解：结构为一次静不定结构，以 B 点约束为多余约束，解除多余约束并以多余约束力 X_1 代替，形成基本结构如图 11-7b 所示。

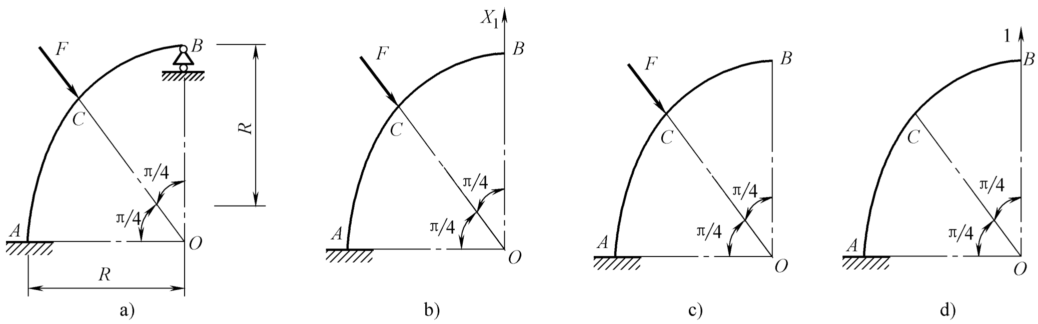


图　11-7

力法的正则方程：$\delta_{11}X_1+\Delta_{1F}=0$

外力和单位力引起的弯矩方程（采用极坐标）如下（图 11-7c 和 11-7d 所示）

BC 段

$$\left.\begin{array}{l} M_1(\theta_1)=0 \\ \overline{M}(\theta_1)=R\sin\theta_1 \end{array}\right\} \quad \left(0\leqslant\theta_1\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} M(\theta_2)=-FR\sin\theta_2 \\ \overline{M}(\theta_2)=R\sin\left(\theta_2+\frac{\pi}{4}\right) \end{array}\right\} \quad \left(0\leqslant\theta_2\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$$

用莫尔积分求 Δ_{1F} 和 δ_{11}。

$$\Delta_{1F}=\int_s\frac{M(s)\overline{M}(s)}{EI}\mathrm{d}s=-\frac{1}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{4}}FR\sin\theta_2\cdot R\sin\left(\theta_2+\frac{\pi}{4}\right)R\mathrm{d}\theta=-\frac{\sqrt{2}\pi FR^3}{16EI}$$

$$\delta_{11}=\int_s\frac{\overline{M}(s)\overline{M}(s)}{EI}\mathrm{d}s=\frac{1}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(R\sin\theta_2)^2R\mathrm{d}\theta_2=\frac{\pi R^3}{4EI}$$

将 Δ_{1F} 和 δ_{11} 代入力法的正则方程中，解出

$$X_1=-\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}}=\frac{\sqrt{2}F}{4}$$

结果为正号，说明所设的 X_1 方向与实际同向。

例 11-2　图 11-8a 所示的桁架，各杆的材料与横截面面积均相同。试计算各杆件的内力。

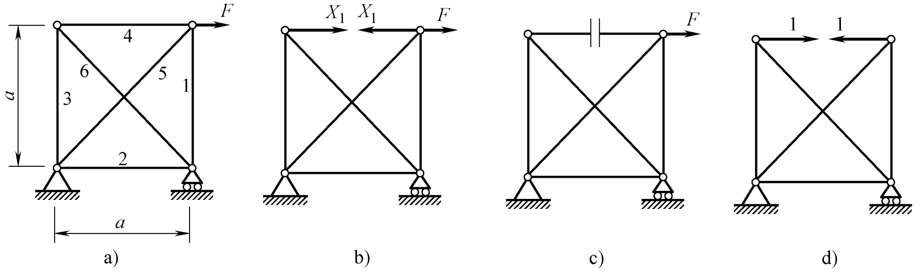


图　11-8

解 该桁架结构支座处的约束力可由平衡方程确定，但是，在桁架内部存在一多余杆件，为一次内力超静定结构。设杆 4 为多余杆件，假想将其切开，并以作用在切口两侧横截面上的轴力 X_1 代替其作用，相当结构如图 11-8b 所示。原结构相应于切口处两侧截面轴向相对位移为零，可列出正则方程

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1F}=0$$

应用莫尔积分计算 δ_{11} 和 Δ_{1F}。为此，首先由图 11-8c、d 分别计算外力 F、单位力所引起的各杆的轴力 F_{Ni}、$\overline{F}_{Ni}$，分别列于表 11-1 中。

表 11-1

杆件编号 i	F_{Ni}	$\overline{F}_{Ni}$	l_i	$F_{Ni}\cdot\overline{F}^2_{Ni}\cdot l_i$	$\overline{F}^2_{Ni}\cdot l_i$	$\tilde{F}_{Ni}=F_{Ni}+X_1\cdot\overline{F}_{Ni}$
1	$-F$	1	a	$-Fa$	a	$-\frac{F}{2}$
2	$-F$	1	a	$-Fa$	a	$-\frac{F}{2}$
3	0	1	a	0	a	$\frac{F}{2}$
4	0	1	a	0	a	$\frac{F}{2}$
5	$-\sqrt{2}F$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}a$	$-2\sqrt{2}Fa$	$2\sqrt{2}a$	$\frac{\sqrt{2}F}{2}$
6	0	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}a$	0	$2\sqrt{2}a$	$-\frac{\sqrt{2}F}{2}$

由莫尔积分

$$\Delta_{1F}=\sum\frac{F_{Ni}\cdot\overline{F}_{Ni}\cdot l_i}{E_iA_i}=-\frac{2(1+\sqrt{2})Fa}{EA}$$

$$\delta_{11}=\sum\frac{\overline{F}^2_{Ni}\cdot l_i}{E_iA_i}=\frac{4(1+\sqrt{2})a}{EA}$$

代入正则方程，解出

$$X_1=-\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}}=\frac{F}{2}$$

由叠加法可求出各杆件的实际轴力 $\tilde{F}_{Ni}$，即

$$\tilde{F}_{Ni}=F_{Ni}+X_1\cdot\overline{F}_{Ni}$$

计算结果列于表 11-1 中。

11.3 对称及反对称性质的应用

1. 对称结构的对称变形与反对称变形

结构几何尺寸、形状、构件材料及约束条件均对称于某一轴，则称此结构为对称结构（见图 11-9a）。当对称结构受力也对称于结构对称轴，则此结构将产生对称变形（见图11-9

b)。如外力反对称于结构对称轴，则结构将产生反对称变形（见图 11-9c）。

正确利用对称、反对称性质，则可推知某些未知量，可大大简化计算过程：如对称变形对称截面上（见图 11-9b），反对称内力 F_S 等于零或已知；反对称变形（见图 11-9c）反对称截面上，对称内力 M 为零或已知。

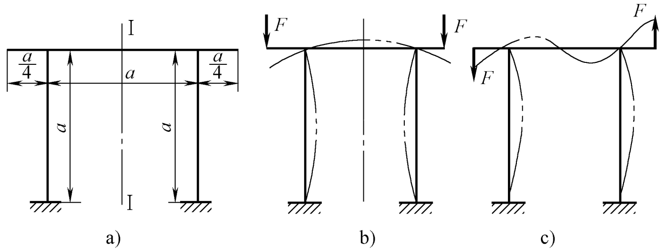


图 11-9　对称结构的对称变形与反对称变形

2. 对称变形

以图 11-10a 对称变形为例，切开结构对称截面，此为三次内力超静定问题，应有三个多余未知力，即轴力 X_1、弯矩 X_2 与剪力 X_3。可证明其反对称内力 X_3 应为零，正则方程为

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_3+\Delta_{1F}=0 \tag{a}$$

$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3+\Delta_{2F}=0 \tag{b}$$

$$\delta_{31}X_1+\delta_{32}X_2+\delta_{33}X_3+\Delta_{3F}=0 \tag{c}$$

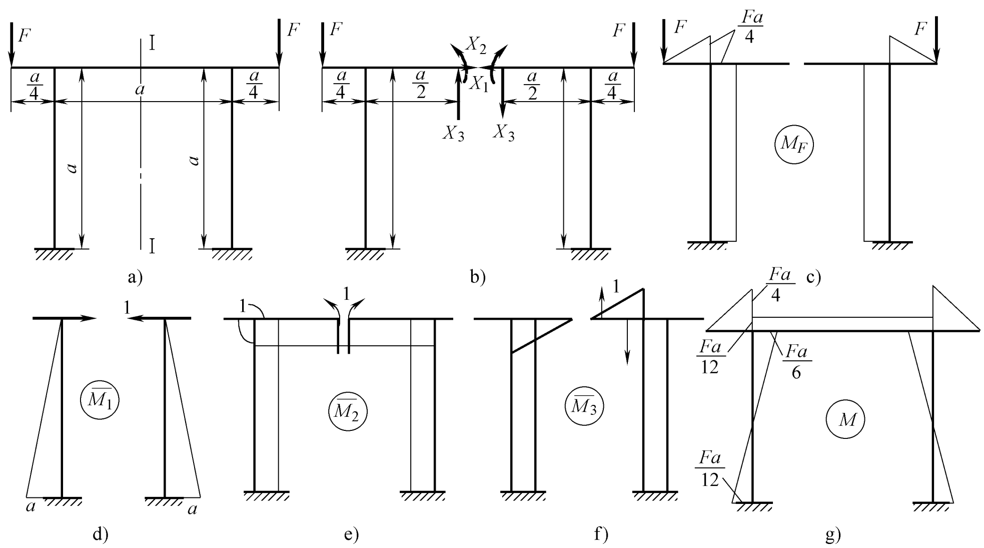


图 11-10　对称结构的对称变形

用图乘法计算 δ_{ij}及 $\Delta_{iF}(i=1, 2, 3)$ 时，所要用的载荷弯矩图 M_F以及 $X_1=1$，$X_2=1$，$X_3=1$ 时的弯矩图分别如图 11-10c、d、e、f，其中 M_F、$\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$ 均对称于对称轴，而 $\overline{M}_3$ 反对称于对称轴。由莫尔积分知对称函数与反对称函数相乘在区间积分应为零，即有

$$\Delta_{3F} = \int_l \frac{M_F \overline{M}_3}{EI} dx = 0, \delta_{13} = \delta_{31} = \int_l \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_3}{EI} dx = 0, \delta_{23} = \delta_{32} = \int_l \frac{\overline{M}_2 \overline{M}_3}{EI} dx = 0$$

将此结果代入式（c），因为 $\delta_{33} \neq 0$ 则必有 $X_3 = 0$。

3. 反对称变形

以图 11-10a 为例，在对称面切开后，其多余未知力也是 X_1、X_2 与 X_3，同上类似证明，其对称内力 X_1 与 X_2 应等于零，只需一个协调方程，即可解出 X_3，即有

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0, \Delta_{1F} = \Delta_{2F} = 0$$

而正则方程为

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0 \quad \text{(a)}$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0 \quad \text{(b)}$$

$$\delta_{33} X_3 + \Delta_{3F} = 0 \quad \text{(c)}$$

由式（a）、式（b）得 $X_1 = X_2 = 0$，由式（c）得 $X_3 = \Delta_{3F}/\delta_{33}$。

4. 可化为对称与反对称的结构

对于某些载荷既非对称，也非反对称，但可将它们化为对称和反对称两种情况的叠加，如图 11-11～图 11-13 所示的结构及其叠加方式。

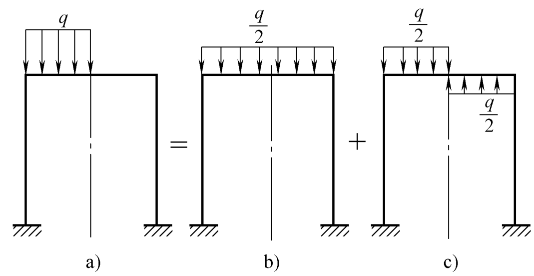


图 11-11 可化为对称与反对称叠加的结构系统

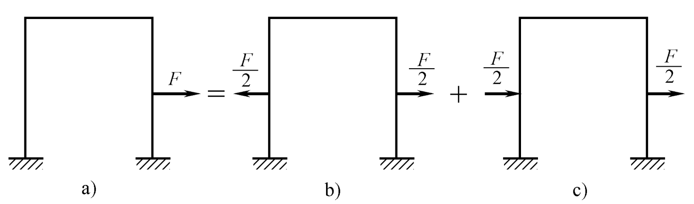


图 11-12 可化为对称与反对称的情形

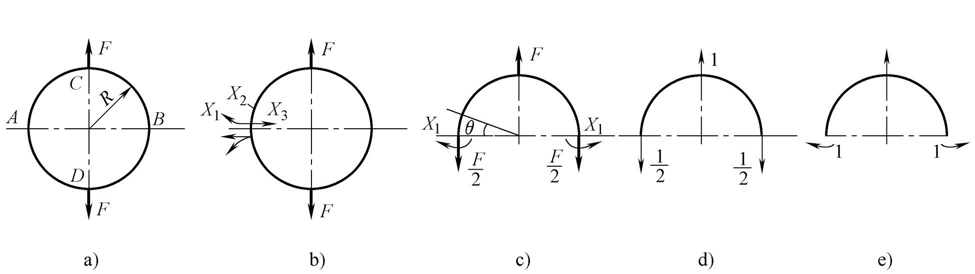


图 11-13 圆环受一对力 F

例 11-3 如图 11-14a 所示，一根半径为 R 的圆环，直径 AB 方向受一对拉力 F 作用。求圆环内任意横截面的弯矩 $M(\varphi)$。

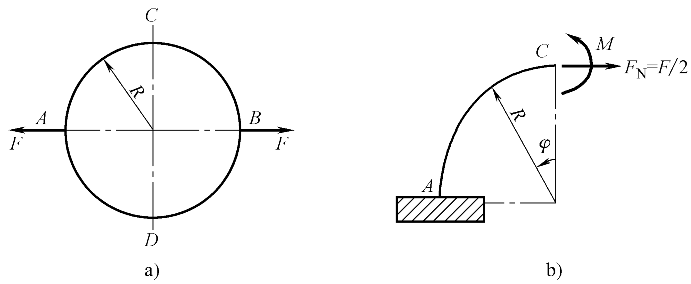


图　11-14

解：封闭圆环为三次超静定结构，一般在任意截面上有三个多余未知力，即：弯矩$X_1=M$，轴力 $X_2=F_N$，剪力 $X_3=F_S$。

考虑结构上下对称性，在 A 处和 B 处截面作用有弯矩，但是转角为零，因此可以将 A 处和 B 处截面等效为固定端约束。再考虑结构左右对称，在 C 处和 D 处截面只能作用有对称内力，即：弯矩 M 和轴力 F_N，反对称内力剪力 $F_S=0$。另外考虑到在 C 处和 D 处截面轴力与拉力 F 平衡，且两处截面轴力相等，则在 C 处有 $F_N=F/2$（图 11-14b）。故只有弯矩 $X_1=M$ 未知，在 C 处，问题简化为一次超静定问题。

则协调条件应是 C 截面在 $F_N=F/2$ 及弯矩 $X_1=M$ 作用下转角 θ 为零（由对称性可知），所以有

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1F}=0 \tag{a}$$

用莫尔法求 δ_{11} 与 Δ_{1F}

根据对称性，可只取 1/4 圆环进行计算，故有

单位力偶引起弯矩：
$$\overline{M}(\varphi)=1,\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right) \tag{b}$$

外力引起弯矩：
$$M(\varphi)=\frac{FR}{2}(1-\cos\varphi),\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right) \tag{c}$$

$$\delta_{11}=\int_l\frac{\overline{M}\cdot\overline{M}}{EI}\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R}{EI}\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi R}{2EI}$$

$$\Delta_{1F}=\int_l\frac{M_P\overline{M}}{EI}\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{FR^2(1-\cos\varphi)}{EI}\mathrm{d}\varphi=-\frac{FR^2}{2EI}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

求未知力 X_1，由式（a）得

$$X_1\cdot\left(\frac{\pi R}{2EI}\right)-\frac{FR^2}{2EI}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=0$$

所以

$$X_1=\frac{FR}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=0.182FR$$

圆环内弯矩 $M(\varphi)$ 为：

$$M(\varphi)=M(\varphi)+X_1\overline{M}(\varphi)=\frac{FR}{2}(1-\cos\varphi)-(0.182FR)\times1=(0.636-\cos\varphi)\frac{FR}{2}$$

本章小结

1. 静定结构、超静定结构与超静定次数

静定结构（或系统）：无多余约束（或联系）的几何不变的承载结构系统，其支承约束力及内力都可由静力学平衡方程求得，静定结构除了受力变形外，没有可运动的自由度。

超静定结构：在静定系统上增加多余约束，因而增加了多余约束未知力，用静力平衡方程不能确定其全部未知支承约束力和内力的结构系统。

超静定次数：超静定结构的所有未知支承约束力和内力的总数与结构所能提供的独立的静力平衡方程数之差，即为此结构的超静定次数（或阶数）。

内、外超静定：超静定结构外部支座约束力不能全部由静力平衡方程求出的情况，常称为外超静定。超静定结构内部约束形成的内力不能由静力平衡方程求出的情况称为内超静定结构。内、外超静定次数之和为该超静定结构的超静定次数。

2. 基本静定系（静定基）与相当系统

解除超静定结构的某些约束后得到的静定结构，称为原超静定结构的基本静定系（又叫作静定基）。在基本静定系上加上外载荷和多余约束力，这样的系统称为相当系统。

3. 力法解超静定结构

以多余未知力为基本未知量求解超静定结构的方法，称为力法。

应用力法求解超静定问题的步骤：

1）根据问题，确定其是静定还是超静定问题，如为后者，确定超静定次数。

2）确定哪些约束是多余约束，分析可供选择的基本静定系，并注意利用对称性、反对称性，选定合适的静定系统，在静定系上加上外力和多余约束力，形成相当系统。

3）比较相当系统与原系统，在多余约束处，确定变形协调条件，并列写正则方程（对有 n 个多余约束的结构）

$$
\begin{gathered}
\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\cdots+\delta_{1n}X_n+\Delta_{1F}=0\\
\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\cdots+\delta_{2n}X_n+\Delta_{2F}=0\\
\vdots\\
\delta_{n1}X_1+\delta_{n2}X_2+\cdots+\delta_{nn}X_n+\Delta_{nF}=0
\end{gathered}
$$

4）用莫尔积分计算 δ_{ij}、Δ_{iF}

在基本系统上的不同多余约束处分别施加单位力（广义力），建立单位载荷系统，做出相应内力图。用图乘法分别求出 δ_{ij}，Δ_{iF}。

5）求解正则方程，解出未知多余力 X_i，作出载荷及多余约束力作用于基本静定系上引起的内力图，供进一步分析用。

思考题

11-1　什么是超静定结构的基本静定基和对应的相当系统？

11-2　对于一个超静定结构，其基本静定基的形式唯一吗？

11-3　对于内力超静定结构和外力超静定结构，形成其相当系统时应当注意什么？

11-4　一个二次超静定刚架如图 11-15a 所示，其基本静定基如图 11-15b 所示。结构的力法正则方程为

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta_{1F} \\ \Delta_{2F} \end{pmatrix} = 0$$

其中 Δ_{2F}的物理意义是什么？

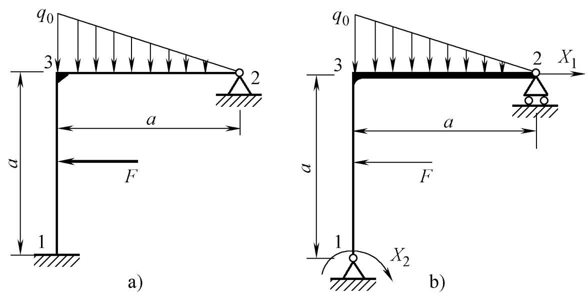


图 11-15　思考题 11-4 图

11-5　分析图 11-16 所示结构的超静定次数。

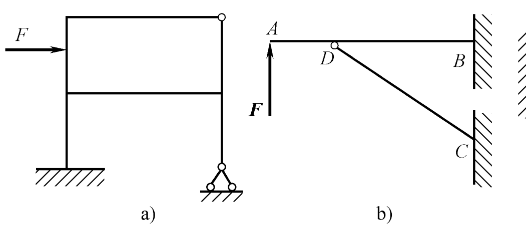


图 11-16　思考题 11-5 图

11-6　图 11-17 所示带有中间铰的梁受均布载荷作用，在截面 C 上________。

（A）有弯矩，无剪力；　　　　（B）有剪力，无弯矩；

（C）既有弯矩，又有剪力；　　（D）既无弯矩，又无剪力。

11-7　图 11-18 所示超静定梁承受反对称均布载荷作用，此题应为________次超静定，若利用反对称性，该结构可简化为________次超静定问题。

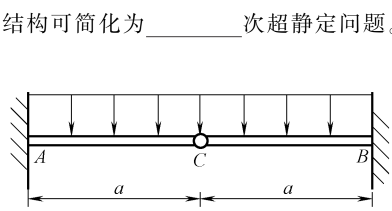


图 11-17　思考题 11-6 图

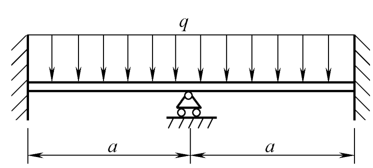


图 11-18　思考题 11-7 图

11-8　在解超静定系统的力法正则方程中，系数 δ_{ij}($i \neq j$) 和 δ_{ii}满足________。

（A）δ_{ij}可正可负，δ_{ii}恒正；　　　（B）δ_{ij}可正可负，δ_{ii}恒正；

（C）δ_{ij}和 δ_{ii}均为恒正；　　　（D）δ_{ij}和 δ_{ii}均可正可负。

11-9　利用对称性和反对称性简化图 11-19 所示超静定结构，画出简化后的等效半边结构及求解半边结构的相当系统，并分析结构在简化前及简化后的超静定次数。

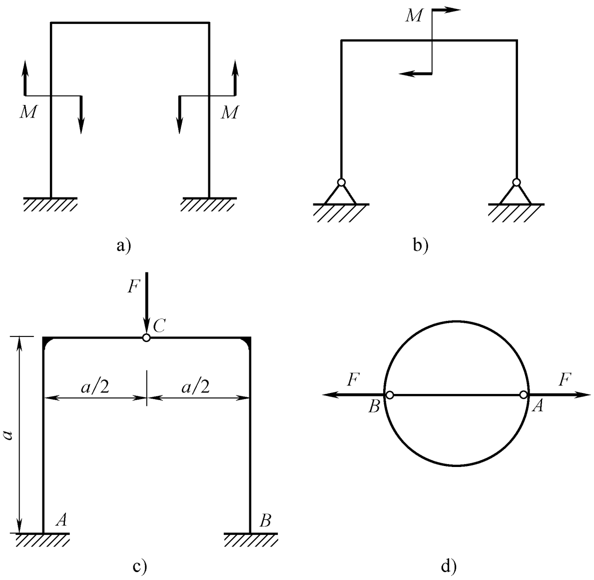


图 11-19　思考题 11-9 图

习 题

11-1　如图 11-20 所示，*AB* 杆与刚架用铰链连接。各部分的弯曲刚度为 *EI*，*AB* 杆拉压刚度为 *EA*，结构承受力 *F* 作用。试求 *AB* 杆的轴力。

11-2　求图 11-21 所示刚架在固定端的约束反力偶矩。设刚架各杆的 *EI* 皆相等。

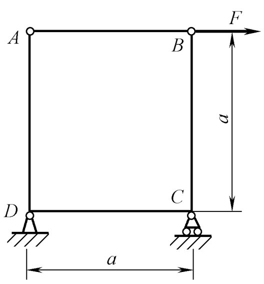


图 11-20　题 11-1 图

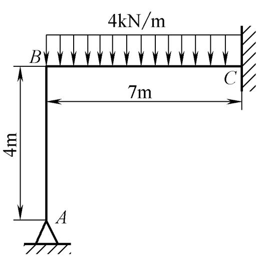


图 11-21　题 11-2 图

11-3　如图 11-22 所示，已知刚架的弯曲刚度为 *EI*，试求支座 *E* 的约束力和刚架内最大弯矩。

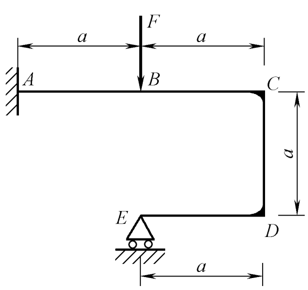


图 11-22　题 11-3 图

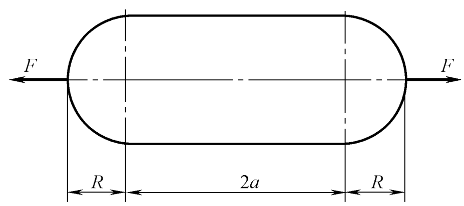


图 11-23　题 11-4 图

11-4　链条的一环如图 11-23 所示。试求左右对称截面上的弯矩和环内最大弯矩。

11-5　如图 11-24 所示，折杆截面为圆形，直径 $d=2\text{cm}$。$a=0.2\text{m}$，$l=1\text{m}$，$F=650\text{N}$，$E=200\text{GPa}$，$G=80\text{GPa}$。试求 F 力作用点的垂直位移。

11-6　求解图 11-25 所示超静定刚架在中间对称截面上的内力。

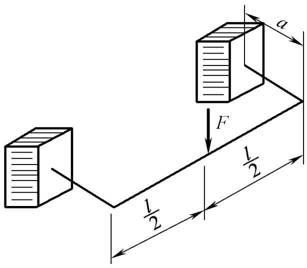


图 11-24　题 11-5 图

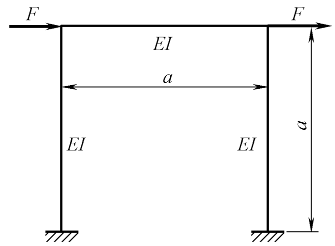


图 11-25　题 11-6 图

11-7　如图 11-26 所示桥式起重机，大梁 AB 由工字梁组成，上部加强部件均为拉压杆，且各杆截面面积均为 A。若起吊重量 F 在跨中点，试求 CD 杆的轴力。

11-8　抗弯刚度为 EI，两端固支梁受力如图 11-27 所示。求两端固支梁的约束力。

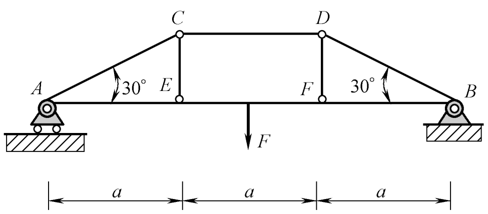


图 11-26　题 11-7 图

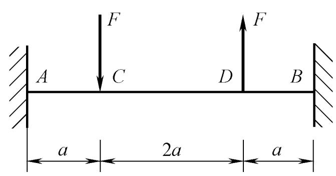


图 11-27　题 11-8 图

11-9　如图 11-28 所示，直梁 ABC 在承受载荷前搁置在支座 A、C 上，梁与支座 B 间有一间隙 Δ。当加上均布载荷 q 后，梁就发生变形而在中点处与支座 B 接触，因而三个支座都产生约束力。如要使这三个约束力相等，则 Δ 值应为多大？

11-10　图 11-29 所示杆系各杆的材料相同，截面 EA 相等。试用力法求各杆的内力。

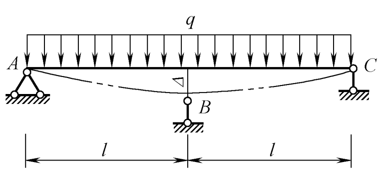


图 11-28　题 11-9 图

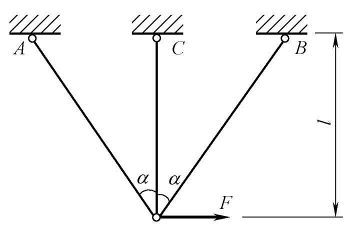


图 11-29　题 11-10 图

11-11　平面刚架受力如图 11-30 所示，结构受到集中力偶和均布载荷作用。刚架的抗弯刚度 EI 为常量。试求刚架对称截面 C 上的剪力。

11-12　平面直角刚架受力如图 11-31 所示，已知刚架各个部分的抗弯刚度均为 EI，试求刚架对称截面上的剪力。（不计剪力和轴力对于弯矩的影响。）

11-13　小曲率圆环受三个等角度分布集中载荷 F 作用，如图 11-32 所示。已知抗弯刚度 EI 为常数。试求 A 截面的弯矩。

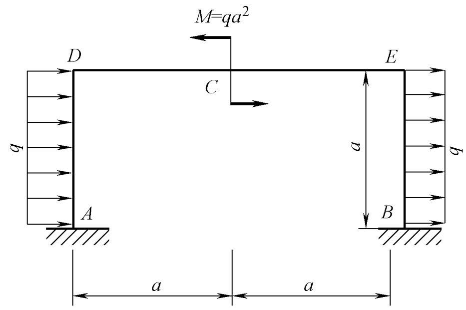


图 11-30　题 11-11 图

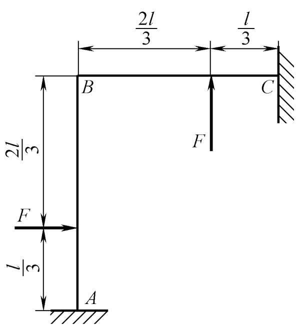


图 11-31　题 11-12 图

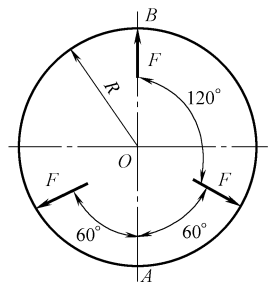


图 11-32　题 11-13 图

第 12 章 动载荷

内容梗概：计算构件的应力和变形时，如果加载速率很小，构件中各材料质点的加速度很小可略去不计，称为静载荷。反之，如果构件上的载荷在短暂的时间内急剧变化，构件中各材料质点的加速度较大，则称为动载荷。研究冲击引起的动应力问题，分析方法基于能量守恒定律。即：略去冲击过程中的能量损失，假设在冲击极限位置时，冲击系统的速度为零，冲击物的动能和势能全部转化为被冲击构件的弹性变形能。冲击动荷因数 k_d 是冲击问题分析中引入的重要概念。在线弹性范围内，动载荷、动变形和动应力分别与相应的静载荷、静变形和静应力成比例，这个比例系数就是 k_d。

12.1 动载荷的概念

前面各章讨论的都是构件在静载荷作用下的应力、应变及位移计算。静载荷是指构件上的载荷从零开始平稳地增加到最终值。因加载缓慢，加载过程中构件上各点的加速度很小，可认为构件始终处于平衡状态，加速度影响可略去不计。动载荷是指随时间作明显变化的载荷，即具有较大加载速率的载荷。一般可用构件中材料质点的应力速率（$\dot{\sigma}=\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t$）来表示载荷施加于构件的速度。实验表明，只要应力在比例极限之内，应变与应力关系仍服从胡克定律，因而，通常也用应变速率（$\dot{\varepsilon}=\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}t$）来表示载荷随时间变化的速度。一般认为标准静载荷的 $\dot{\varepsilon}=(0.01\sim3)/\mathrm{min}$ ，随着动载荷 $\dot{\varepsilon}$ 的增加，它对材料力学性能的影响越趋明显。对金属材料，静载荷范围约在 $\dot{\varepsilon}=10^{-4}\sim10^{-2}/\mathrm{s}$，如果 $\dot{\varepsilon}\geqslant10^{-2}/\mathrm{s}$，即认为是动载荷。在动载荷作用下，构件在短时间（微秒级）内受到剧烈变化的冲击力作用，将引起材料力学性能的很大变化，由于问题的复杂性，工程上采用能量法进行简化分析计算。

12.2 构件受冲击载荷作用时的动应力计算

1. 工程中的冲击问题

锻锤与锻件的撞击、重锤打桩、用铆钉枪进行铆接、高速转动的飞轮突然制动等均为冲击问题，其特点是冲击物在极短瞬间速度剧变为零，被冲击物在此瞬间经受很大的 $\dot{\sigma}$ 和 $\dot{\varepsilon}$。

2. 求解冲击问题的能量法

冲击问题极其复杂，难以精确求解。工程中常采用一种较为简略但偏于安全的估算方

法——能量法，来近似估算构件内的动载荷和动应力。

在动应力估算中做如下基本假定：①不计冲击物的变形；②冲击物与构件（被冲击物）接触后无回弹，二者合为一个运动系统；③构件的质量（惯性）与冲击物相比很小，可略去不计，冲击应力瞬时传遍整个构件；④材料服从胡克定律；⑤冲击过程中，声、热等能量损耗很小，可略去不计。在以上假设下，即可利用机械能守恒定律估算动应力。

3. 杆件受冲击时的应力和变形分析计算模型

任一被冲击物（弹性杆件或结构）都可简化成图 12-1 所示的弹簧。冲击过程中，设重量为 G 的冲击物一经与弹簧接触就互相附着共同运动。如省略弹簧的质量，只考虑其弹性，可简化成单自由度的运动体系。冲击物与弹簧接触瞬间的动能为 T；弹簧达到最低位置时体系的速度变为零，弹簧的变形为 Δ_d，冲击物 G 的势能变化为

$$V=G\Delta_d \tag{12-1}$$

若以 U_d 表示弹簧的变形能，由能量守恒定律，冲击系统的动能和势能全部转化成弹簧的变形能：

$$T+V=U_d \tag{12-2}$$

设体系速度为零时冲击物作用在弹簧上的冲击载荷为 F_d。材料服从胡克定律条件下，F_d 与 Δ_d 成正比。故冲击过程中动载荷所做的功为$\frac{1}{2}F_d\Delta_d$，且有

$$U_d=\frac{1}{2}F_d\Delta_d \tag{12-3}$$

若重物 G 以静载方式作用于构件上，构件的静变形和静应力分别为 Δ_{st}和 σ_{st}。在动载荷 F_d 作用下，相应的冲击变形和冲击应力分别为 Δ_d 和 σ_d。对于线弹性材料，有比例关系：

$$\frac{F_d}{G}=\frac{\Delta_d}{\Delta_{st}}=\frac{\sigma_d}{\sigma_{st}} \tag{12-4a}$$

或

$$\sigma_d=\frac{\Delta_d}{\Delta_{st}}\sigma_{st} \tag{12-4b}$$

将式（12-4a）中的 F_d 代入式（12-3）得

$$U_d=\frac{1}{2}\frac{\Delta_d^2}{\Delta_{st}}G \tag{12-5}$$

将式（12-1）、式（12-5）代入式（12-2），有

$$\Delta_d^2-2\Delta_{st}\Delta_d-\frac{2T\Delta_{st}}{G}=0$$

解得

$$\Delta_d=\Delta_{st}\left(1+\sqrt{1+\frac{2T}{G\Delta_{st}}}\right) \tag{12-6}$$

引入冲击动荷因数 k_d：

$$k_d=\frac{\Delta_d}{\Delta_{st}}=1+\sqrt{1+\frac{2T}{G\Delta_{st}}} \tag{12-7}$$

如果冲击是由重物 G 从高度 h 处自由下落造成的，如图 12-2 所示，则冲击开始时，G 的动能：

$$T=\frac{1}{2}\frac{G}{g}v^2=\frac{1}{2}\frac{G}{g}\times 2gh=Gh \tag{12-8}$$

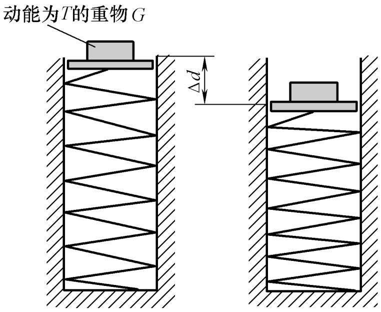


图 12-1　冲击物与受冲击的弹簧

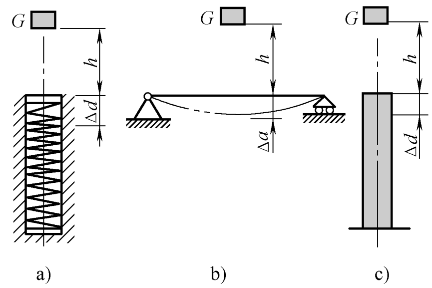


图 12-2　构件受自由下落重物的冲击

a）自由下落重物冲击弹簧　b）构件受自由下落重物的冲击　c）自由下落重物冲击弹性杆

将式（12-8）代入式（12-7），得到当重物由高度 h 静止开始自由下落时的冲击动荷因数 k_d 为

$$k_d=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{st}}} \tag{12-9}$$

从式（12-9）可以看出，即使冲击物初始高度 $h=0$（即冲击速度为零），但只要是突然加于构件上的载荷，性质也是动载荷。此时冲击动荷因数 $k_d=2$。

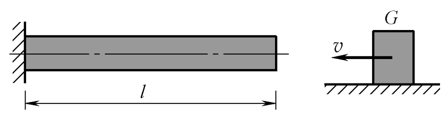


图 12-3　构件受水平冲击

当质量为 $m=\frac{G}{g}$ 的物体以初始速度 v 进行水平冲击时（见图 12-3），冲击物的势能 $V=0$，则动能为 $T=\frac{1}{2}\frac{G}{g}v^2$，于是由式（12-2）、式（12-5）得

$$\frac{1}{2}\frac{G}{g}v^2=\frac{1}{2}\frac{\Delta_d^2}{\Delta_{st}}G$$

可解得

$$\Delta_d=\sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}}\Delta_{st}=k_d\Delta_{st} \tag{12-10}$$

由此得到当质量为 $m=\frac{G}{g}$ 的物体以初始速度 v 进行水平冲击时动荷因数 k_d 为

$$k_d=\sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}} \tag{12-11}$$

根据静-动之间的线性关系，可得到动变形、动载荷和动应力计算公式：

$$\Delta_d=k_d\Delta_{st} \tag{12-12}$$

$$F_d = k_d G \tag{12-13}$$

$$\sigma_d = k_d \sigma_{st} \tag{12-14}$$

例 12-1 如图 12-4 所示，重为 G 的物体从高为 h 处自由落下。已知：AB 梁 EI，CD 杆 EA。试求梁和杆的最大动应力。

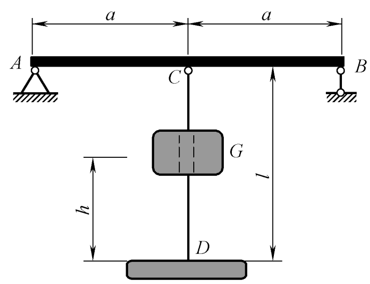


图 12-4 受自由下落重物冲击的梁-杆系统

解：根据题意，计算 D 点的动载荷因数：

$$k_d = 1+\sqrt{1+2h/\Delta_{stD}}$$

其中 D 点的静变形 Δ_{stD} 由梁在 C 点的挠度 f_C 与杆 CD 的伸长量 Δl_{CD} 叠加而成。查表知：$f_C = \dfrac{Ga^3}{6EI}$

所以，$\Delta_{stD} = \dfrac{Ga^3}{6EI}+\dfrac{Gl}{EA}$

因此，$k_d = 1+\sqrt{1+2h/\Delta_{stD}} = 1+\sqrt{1+2h\Big/\left(\dfrac{Ga^3}{6EI}+\dfrac{Gl}{EA}\right)}$

对 AB 梁，C 截面为危险截面。

最大弯矩：$M_{max} = \dfrac{1}{2}Ga$

最大静弯曲应力：$\sigma_{梁st} = \dfrac{Ga}{2W}$

则最大动弯曲应力：$\sigma_{梁d} = k_d \dfrac{Ga}{2W}$

对 CD 杆，

最大静拉伸应力：$\sigma_{杆st} = \dfrac{G}{A}$

则最大动拉伸应力：$\sigma_{杆d} = k_d \dfrac{G}{A}$

12.3 采用显式有限元法模拟冲击动应力*

在材料力学教科书和一些工程应用中，对冲击动应力问题的分析都是以冲击物的动能全部转化为被冲击物的应变能为基础进行的。这种近似解法将复杂的冲击问题进行简化，得出了动荷因数的概念并借此计算动应力。应当指出，实验测试与弹性动力学理论分析都证明采用动荷因数的概念虽然可以近似计算冲击问题中的动应力，然而这样得到的结果却与实际的动应力发生过程及其应力分布规律有较大的差异。为了加深学生对冲击动应力分析方法的认识，可以利用 ANSYS/LS-DYNA 软件进行数值模拟。

ANSYS LS-DYNA 是一个显式通用非线性动力分析有限元程序，可以求解各种二维、三维非线性结构的高速碰撞、爆炸和金属成形等非线性问题。由于在世界范围内广泛应用，此软件数值模拟冲击动应力的可靠性是被认可的。显式求解方法非常适合动态问题的求解，它

的最初发展是为了模拟高速冲击问题，在这类问题的求解中惯性发挥了主导性作用。当求解动力平衡的状态时，非平衡力以应力波的形式在相邻的单元之间传播。其特点是采用向前差分算法，要求最小稳定时间增量步取非常小的值，所以大多数问题需要大量的时间增量步。

例如：用 ANSYS/LS-DYNA 软件对一根悬臂梁在端部重锤冲击过程进行数值模拟。重锤和梁均采用 LS-DYNA 中的 solid164 单元（8 结点六面体单元）。详细的操作过程作为一道本章习题由同学完成。

此数值模拟结果和验证性冲击实验的数值一致，差异反映在冲击之后的自由振动部分，有限元数值模拟的振幅大于实验测量的振幅。原因是实验时，重锤冲击后（由于导向柱的限制）保持与梁接触，随梁一起振动，数值计算时（无导向柱）重锤冲击后被弹开，梁独自振动，从而导致两者振幅的不同。

据文献报道，数值计算结果与实验值相对差不超过 3.1%，与材料力学理论值相对误差是 14%~23%。其原因是，梁受冲击后应力以波的形式在梁中传播，而非瞬时传遍全梁。在某一时刻，应力波的主要能量可能会集中于梁的一部分上，而不像静载荷那样应变能按弯矩的大小分布。材料力学教科书中的假设与实际的差别可能是因为理论结果与实验结果相对差为 19% 左右。

本章小结

1. 材料力学关于冲击动应力计算是冲击问题的简化计算。

2. 冲击问题涉及以下基本概念：动载荷、冲击载荷、动应力、冲击应力、动荷因数。

3. 构件受冲击时的冲击动荷因数 k_d 为

$$k_d=\frac{\sigma_d}{\sigma_{st}}=\frac{\Delta_d}{\Delta_{st}}$$

这个式子是冲击动荷因数的定义式，其计算式要根据具体的冲击形式经分析推导而定。

当重物由高度 h，静止开始自由下落时的冲击动荷因数 k_d 为

$$k_d=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{st}}}$$

当质量为 $m=\frac{G}{g}$ 的物体以初始速度 v 进行水平冲击时动荷因数 k_d 为

$$k_d=\sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}}$$

两个 k_d 中包含丰富的内容。它们不仅能给出动的力学量与静的力学量之间的相互关系，而且包含了影响动载荷和动应力的主要因素，从而为寻求降低动载荷对构件的不利影响的方法提供了思路和依据。

4. 本节涉及的基本原理和基本方法

1）能量分析法，其依据是能量守恒原理。这个方法为分析复杂的冲击问题提供了简略的计算手段。在运用此法分析计算实际工程问题的动应力时，应注意对其基本假设逐项进行考察与分析，否则有时将得出不合理的结果。

2）ANSYS-LS DYNA 是一种显式有限元软件，其理论依据是求解动态冲击问题的过程

中，惯性发挥了主导性作用。当求解动力平衡的状态时，非平衡力以应力波的形式在相邻的单元之间传播。因此，可以相当精确地模拟出在不同时刻，结构物内部的应力响应。

思 考 题

12-1　什么叫作动载荷？可以分为哪几类？分别用什么方法求解？

12-2　采用能量方法分析复杂的冲击问题时使用了哪些假设，这些假设与实际情况符合吗？

12-3　计算动荷因数 k_d 时，应当分几种冲击类型？

12-4　通过比较采用能量方法和采用显式有限元方法分析冲击问题，你可以得出什么结论？

12-5　材料相同、长度相等的变截面圆杆和等截面圆杆如图 12-5 所示。若两杆的最大横截面面积相同，问哪一根杆件承受冲击的能力强？设变截面杆直径为 d，$d=D/2$，该部分长为 $\frac{2}{5}l$，为了便于比较，假设 H 较大，可以近似地把动荷因数取为 $k_d=1+\sqrt{1+\frac{2H}{\Delta_{st}}}\approx\sqrt{\frac{2H}{\Delta_{st}}}$

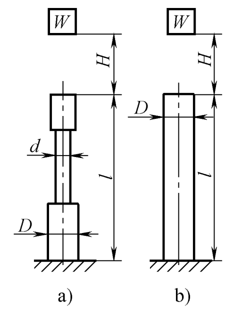


图 12-5　思考题 12-5 图

习 题

12-1　重量为 G 的重物自高度 H 下落冲击于梁上的 C 点，如图 12-6 所示。设梁的 E、I 及抗弯截面系数 W 皆为已知量。试求梁内最大正应力及梁的跨度中点的挠度。

12-2　AB 杆下端固定，长度为 l，在 C 点受到沿水平运动的物体 G 的冲击，如图 12-7 所示。物体的重量为 P，当其与杆件接触时的速度为 v。设杆件的 E、I 及 W 皆为已知量。试求 AB 杆的最大应力。

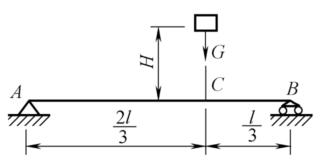


图 12-6　题 12-1 图

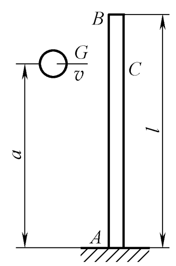


图 12-7　题 12-2 图

12-3　如图 12-8 所示，一重量为 G 的重物从高为 H 处自由下落到一根矩形截面悬臂梁的自由端并附着。不计梁的重量，E 为材料的弹性模量。梁截面高度 h 保持不变，两段梁可按不同宽度设计。设阶梯梁在靠近自由端一段宽度为 b_1，靠近固定端一段宽度为 b_2。在梁内最大冲击正应力不变的条件下，比值 b_1/b_2 为多少时，此梁最省材料？

12-4　如图 12-9 所示，直径 $d=30\text{cm}$、长为 $l=6\text{cm}$ 的圆木桩，下端固定，上端受重 $W=2\text{kN}$ 的重锤作用。木材的 $E=10\text{GPa}$。求下列三种情况下，木桩内的最大正应力：

（1）重锤以静载荷的方式作用于木桩上；

（2）重锤从离桩顶 0.5m 的高度自由落下；

（3）在桩顶放置直径为 15cm、厚为 40mm 的橡皮垫，橡皮的弹性模量 $E_1=8\text{MPa}$。重锤也是从离橡皮

垫顶面 0.5m 的高度自由落下。

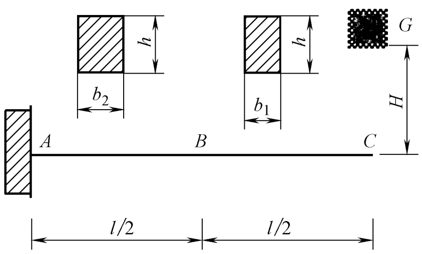


图 12-8　题 12-3 图

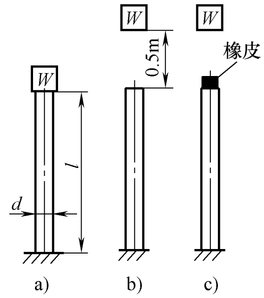


图 12-9　题 12-4 图

12-5　图 12-10 所示钢杆的下端有一固定圆盘，盘上放置弹簧。弹簧在 1kN 的静载荷作用下缩短 0.0625cm。钢杆的直径 $d=4\text{cm}$，$l=4\text{m}$，许用应力 $[\sigma]=120\text{MPa}$、$E=200\text{GPa}$。若有重为 15kN 的重物自由落下，求其许可的高度 H。又若没有弹簧，则许可高度 H 将等于多大？

12-6　如图 12-11 所示，圆轴直径 $d=6\text{cm}$，$l=2\text{m}$，左端固定，右端有一直径 $D=40\text{cm}$ 的鼓轮。轮上绕以钢绳，绳的端点 A 悬挂吊盘。绳长 $l_1=10\text{m}$，横截面面积 $A=1.2\text{cm}^2$，$E=200\text{GPa}$。轴的切变模量 $G=80\text{GPa}$。重量 $G=800\text{N}$ 的物块自 $h=20\text{cm}$ 处落于吊盘上，求轴内最大切应力和绳内最大正应力。

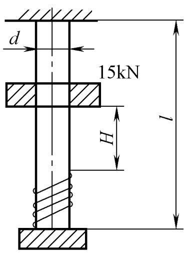


图 12-10　题 12-5 图

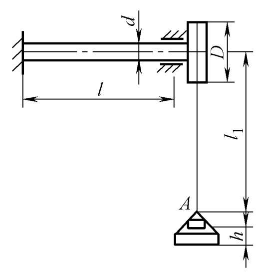


图 12-11　题 12-6 图

12-7　如图 12-12 所示，钢吊索的下端悬挂一重量为 $G=25\text{kN}$ 的重物，并以速度 $v=100\text{cm/s}$ 下降。当吊索长为 $l=20\text{m}$ 时，滑轮突然被卡住。试求吊索受到的冲击载荷 F_d。设钢吊索的横截面面积 $A=4.14\text{cm}^2$，弹性模量 $E=170\text{GPa}$，滑轮和吊索的质量可略去不计。

12-8　AB 和 CD 两梁的材料相同，横截面面积相同。在图 12-13 所示冲击载荷作用下，试求两梁最大应力之比和各自吸收能量之比。

12-9　速度为 v、重为 G 的重物，沿水平方向冲击于梁的截面 C，如图 12-14 所示。试求梁的最大动应力。设已知梁的 E、I 和 W，且 $a=0.6l$。

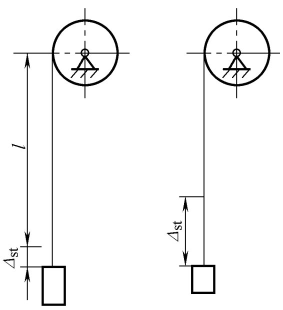


图 12-12　题 12-7 图

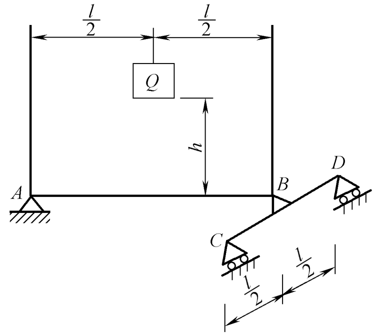


图 12-13　题 12-8 图

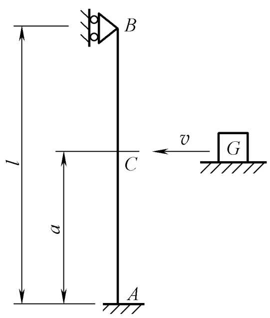


图 12-14　题 12-9 图

12-10　用 ANSYS-LS DYNA 求解重物冲击悬臂梁问题

问题描述：如图 12-15 所示一根铝质悬臂梁长 $L=2$m，截面为矩形：宽×高＝0.2m×0.4m，铝的质量密度＝2700kg/m^3，弹性模量＝70GPa，泊松比＝0.33。一钢质立方体：长×宽×高＝0.2m×0.2m×0.2m，钢的质量密度＝7800kg/m^3，弹性模量＝210GPa，泊松比＝0.28。钢质立方体从某高度自由下落冲击梁的自由端，接触时的速度＝10m/s，重力加速度 $G=9.81$m/s^2。

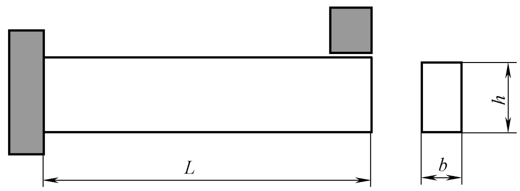


图 12-15　题 12-10 图

求：在 0.01s 内的冲击动应力分布。

准备工作：配置 ANYS-LS DYNA 的工作环境

打开 ANSYS Mechanical APDL Product Launcher

在第二框 License：下拉出

ANSYS Multiphysics/LS-DYNA

在右框 LS-DYNA（-DYN）内打勾

然后执行：Run

通过施加冲击速度求解

1. 设置计算类型

Preferences→Structural

Discipline options→LS-DYNA Explicit→OK

2. 选择单元类型

Preprocesor-Element Type-Add→SOLID164→OK→Close

3. 定义材料参数（设定材料 1（铝质悬臂梁）和材料 2（钢质立方体）的材料参数：弹性模量、泊松比、质量密度）

Main Menu：Preprocessor→Material Props→Material Models→Model Number 1--LS-DYNA→Nonlinear→Isotropic Hardening→Bilinear Isotropic→DENS：2700→EX：70e9→NUXY：0.33→OK

→Material→New Model→Deine Material→ID：2→OK→LS-DYNA→Linear→Elastic→Isotropic→DENS：7800→EX：210e9→NUXY：0.28→Exit

4. 建模：悬臂钢梁与重物立方体

在最左边生成一个铝质悬臂梁

Main Menu：Preprocessor→Modeling→Create→Volumes→Block→By 2 Corners & Z→WP X：0，WP Y：0，→Width：2，Height：0.4，Depth→0.2→Apply

生成钢质立方体

Main Menu：Preprocessor→Modeling→Create→Volumes→Block→By 2 Corners & Z→WP X：1.8，WP Y：0.4，→Width：0.2，Height：0.2，Depth→0.2→OK

5. 网格划分

Main Menu：Preprocessor→Meshing→Mesh Tool→Element Attrbutes：下拉 Set→OK→Lines 下拉 Set→Element Size on Picked Lines→Pick All→SIZE Element edge length：0.1→OK

Main Menu：Preprocessor→Meshing→Mesh Tool→Volume 拾取：Hex，拾取：Sweep→单击 Sweep→拾取铝质悬臂梁→OK

Main Menu：Preprocessor→Meshing→Mesh Tool→Element Attrbutes：单击右拾取框 Set→Material Number 下拉：2→OK→Volume 拾取：Hex，拾取：Sweep→单击 Sweep→拾取钢质立方体→OK

保存数据库，另起名 mesh2. db

6. Utility Menu→File→Save as：mesh2. db

7. 定义接触

Preprocesor→LS-DYNA Options→Parts Options >Create all parts→OK

通过列表可知 Part 1 对应于材料号 1，是铝质悬臂梁，Part 2 对应于材料号 2，是重物立方体

LS-DYNA Options→Contact→Define Contact

Contact Type→Surface to Surface，右侧选择 Automatic（ASTS）

Static Friction Coefficient 静摩擦因数输入 0. 1

Dynamic Friction Coefficient 动摩擦因数输入 0. 1

(其他不填）→OK

弹出 Contact and Target Definitions，其中 Contact Component 选择 PART1：铝质悬臂梁，Target Component 选择 PART2：钢质立方体（有限元理论要求选择弹性模量较大者为 Target)

8. 保存定义接触后的模型

Utility Menu→File→Save as→Contact. db

9. 定义约束和初始冲击速度

在悬臂梁左侧添加约束

Solution→Constraints→Apply→On Areas→选择铝质悬臂梁左端面→OK

在弹出的选项框中 DOFs to be constrained 选 All DOF 最后一行 VALUE 输入 0→OK

给钢质立方体指定速度 $v_y=-10\text{m/s}$

Solution→Initial Velocity→On Parts→w/Nodal Rotate

弹出 Input Velocity 选项框

Input velocity on part 选择 part 2，在第三行 VY 输入-10→OK

10. 输入求解时间 0. 01s

Solutin→Time Controls→Solution Time，在弹出的选项框中输入 0. 01

11. 求解

Sloution→Solve→OK

12. 后处理

General Postproc→Read Results→可以查看各步骤的求解结果→单击 Last Set

此时可以查看 Plot Results

查看 X 方向的应力

Plot Results→Contour Plot→Nodal Solu→Stress→X-Component of stress

查看整个过程中 Y 方向的应力变化

Main Menu→PlotCtrls→Animate→Over Time

弹出 Animate Over Time 选项框：第一项 frames（帧数）选择 20

在 Contour data for animation 中左侧选择 Stress，右侧选择 X-direction SX→OK

就可以查看 X 方向的应力在 0. 01s 时刻的分布规律，其与材料力学计算结果有明显差异。

第 13 章 弹性力学基础

内容梗概： 弹性力学的基本概念包括应力、应变，平衡方程、几何方程和物理方程。弹性力学问题的基本求解方法分为按应力求解和按位移求解。其中弹性力学平面问题的应力函数解法为主要方法。为了便于材料专业学生进一步学习关于材料科学方面的知识，本章还介绍了位错应力场的基本概念以及刃位错和螺位错应力场公式。

13.1 弹性力学的基本概念

弹性力学与材料力学在研究内容和基本任务方面，是基本相同的，研究对象也是近似的。但是二者的研究方法却有较大的差别。弹性力学和材料力学研究问题的方法都是从静力学、几何学、物理学三方面入手的。但是材料力学的研究对象是杆状构件，即长度远大于宽度和厚度的构件，分析这类构件在拉压、剪切、弯曲、扭转等几类典型外载荷作用下的应力和位移。在材料力学中，除了从静力学、几何学、物理学三方面进行分析外，为了简化推导，还引用了一些关于构件的形变状态或应力分布的假定（如平面截面的假定等）。杆件横截面的变形可以根据平面假设确定，数学求解并没有什么困难。而在弹性力学里研究杆件变形并不做出变形假定，而是通过求解微分方程得到解答。因此，弹性力学解的结果要比材料力学的解答精确得多。从数学的角度看，弹性力学是求解满足一定边界条件的偏微分方程问题。理论上讲，弹性力学能解决一切弹性体的应力和应变问题。但在工程实际中，一般构件的形状、受力状态、边界条件都比较复杂，所以除少数的典型问题外，对大多数工程实际问题，往往都无法用弹性力学的基本方程直接进行解析求解，有些只能通过数值计算方法来求得其近似解，如有限单元法。

弹性力学要求所研究的材料满足：①线弹性；②均匀连续性；③各向同性；④小变形。

1. 体力

体力是分布在物体体积内的力，如重力和惯性力。沿直角坐标轴的体力分量可以表示为坐标的函数：$X=X(x, y, z)$，$Y=Y(x, y, z)$，$Z=Z(x, y, z)$。

2. 面力

面力是分布在物体表面上的力，如接触压力。沿直角坐标轴的面力分量可以表示为坐标的函数：$\overline{X}=(x, y, z)$，$\overline{Y}=\overline{Y}(x, y, z)$，$\overline{Z}=\overline{Z}(x, y, z)$。

3. 应力

与材料力学中关于应力的知识相同，正应力用 σ 表示，切应力用 τ 表示。如图 13-1 所

示，在微分单元体上每个面上的应力都用三个应力分量来表示。由于物体内各点的内力都是平衡的，作用在正方体相对两面上的应力分量大小相等、方向相反。这样，用 9 个应力分量写成矩阵的形式来表示正方体各面上的应力，即

$$\sigma_{ij}=\begin{pmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}\end{pmatrix} \tag{13-1}$$

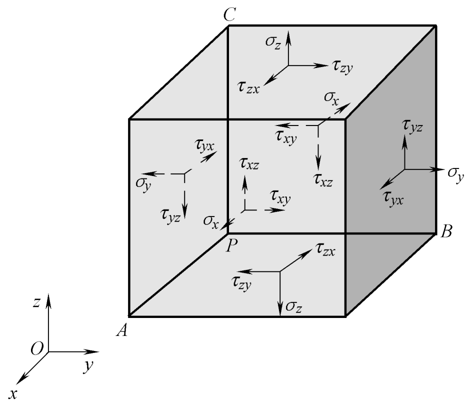


图 13-1　微分体的应力状态

其中，第一下标表示与截面外法线方向相一致的坐标轴，第二下标表示应力的方向与此坐标轴方向相一致。应力分量的符号规定：若应力作用面的外法线方向与坐标轴的正方向一致，则该面上的应力分量就以沿坐标轴的正方向为正，沿坐标轴的负方向为负。相反，如果应力作用面的外法线是指向坐标轴的负方向，那么该面上的应力分量就以沿坐标轴的负方向为正，沿坐标轴的正方向为负。作用在相互垂直平面上的切应力仍满足切应力互等关系：$\tau_{xy}=\tau_{yx}$，$\tau_{xz}=\tau_{zx}$，$\tau_{yz}=\tau_{zy}$。因此，式（13-1）所表示的应力矩阵是一个对称矩阵。

4. 应变

与材料力学应变的定义类似，ε_x、ε_y、ε_z 分别代表了一点处 x、y、z 轴方向的线应变。γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{xz}则分别代表了在 x-y、y-z、x-z 面上的切应变。这六个应变分量称为直角应变分量，可以矩阵形式表示，即

$$\varepsilon_{ij}=\begin{pmatrix}\varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz}\\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z\end{pmatrix} \tag{13-2}$$

线应变 ε 和切应变 γ 都是无量纲的量，γ 的单位是 rad（弧度）。

13.2 主应力

主方向的定义与材料力学相同。由于应力矩阵是一个对称矩阵，在弹性力学中也将应力矩阵的特征值称为主应力 σ_{p}，即通过求应力矩阵特征值的方程：

$$\begin{vmatrix}(\sigma_x-\sigma_{\mathrm{p}}) & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & (\sigma_y-\sigma_p) & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z-\sigma_{\mathrm{p}})\end{vmatrix}=0 \tag{13-3}$$

得到一个关于应力的一元三次方程

$$\begin{aligned}&\sigma_{\mathrm{p}}^3-(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\sigma_{\mathrm{p}}^2+(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2)\sigma_{\mathrm{p}}\\ &-(\sigma_x\sigma_y\sigma_z+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}-\sigma_x\tau_{yz}^2-\sigma_y\tau_{zx}^2-\sigma_z\tau_{xy}^2)=0\end{aligned} \tag{13-4}$$

可以证明，该方程有三个实根。这三个根就是任意点处的三个主应力。

13.3 平衡微分方程

一般情况下，物体内各点的应力分量都是点的位置坐标 x、y、z 的单值连续函数。当弹性体在外力作用下保持平衡时，可根据平衡条件来导出应力分量与体积力分量之间的关系式，即平衡微分方程。考虑处于平衡状态的物体，其内部各部分也都处于平衡状态。为导出平衡微分方程，从中取出一微分正六面体，其棱边尺寸分别为 dx、dy、dz，如图 13-2 所示。为清楚起见，图中仅画出了在 x 方向有投影的应力分量。需要注意的是，两对应面上的应力分量，由于其坐标位置不同，而存在一个应力增量。例如，在 $AA'D'D$ 面上作用有正应力 σ_x，那么由于 $BB'C'C$ 面与 $AA'D'D$ 面在 x 坐标方向上相差了 dx，由泰勒级数，并舍弃高阶项，可导出 $BB'C'C$ 面上的正应力应表示为 $\sigma_x+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x$。其余情况可类推。

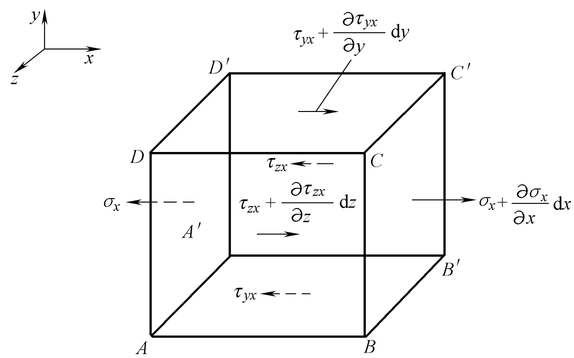


图 13-2　微分单元体的应力平衡

由于所取的六面体是微小的，其各面上所受的应力可以认为是均匀分布的，且作用在各面的中心。另外，若微小六面体上除应力之外，还作用有体积力，那么也假定体积力是均匀分布的，且作用在微元体的体积中心。这样，在 x 方向上，根据平衡方程 $\sum F_x=0$，有

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\sigma_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z-\tau_{yx}\mathrm{d}x\mathrm{d}z+$$

$$\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\tau_{zx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+X\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0 \tag{a}$$

整理得

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X=0 \tag{b}$$

同理可得 y 方向和 z 方向上的平衡微分方程，结合式（b）有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X=0\\[2ex]\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+Y=0\\[2ex]\dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0\end{cases} \tag{13-5}$$

上述这组微分关系是弹性力学中的基本关系之一。凡处于平衡状态的物体，其应力分量函数都应满足这个方程。

13.4 边界条件

若物体在外力的作用下处于平衡状态，那么位于物体表面上的边界点，也应当与作用在该点处的外力相平衡。这种边界点的平衡条件，称为应力边界条件。在应力边界 S_σ 上，应力边界条件可以表示为

$$\begin{cases} \bar{X}=n_x\sigma_x+n_y\tau_{yx}+n_z\tau_{zx} \\ \bar{Y}=n_x\tau_{xy}+n_y\sigma_y+n_z\tau_{zy} \\ \bar{Z}=n_x\tau_{xz}+n_y\tau_{yz}+n_z\sigma_z \end{cases} \tag{13-6}$$

式中，n_x、n_y、n_z 分别代表了在 x-y、y-z、x-z 面上的外法线方向余弦。除应力边界面积 S_σ 外，还有位移边界（即边界上的位移给定）面积 S_u。用 S 表示整个弹性体的表面积，则有 $S=S_\sigma+S_u$。设 $\bar{u}$、$\bar{v}$、$\bar{w}$ 表示给定的 S_u 上的点在 x、y、z 轴方向的位移，在 S_u 上，则位移边界条件为

$$u=\bar{u},v=\bar{v},w=\bar{w} \tag{13-7}$$

总之，求解弹性力学问题时，应力分量函数必须满足平衡微分方程（13-5），同时在应力边界 S_σ 上还应满足边界条件（13-6），在位移边界条件 S_u 上，位移还要满足几何边界条件（13-7）。这也正是弹性力学问题求解的困难之一。

例 13-1　图 13-3 所示是重力水坝截面，坐标轴是 Ox 和 Oy，OB 面上的面力为 $F_x=\gamma y$，$F_y=0$，求 OB 面的应力边界条件。

解：OB 面方向余弦为

$$n_x=\cos180°=-1,n_y=\cos270°=0$$

由应力边界条件有

$$F_x=\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y=-1\cdot\sigma_x+\tau_{xy}\cdot0=\gamma y$$

$$F_y=\tau_{xy}n_x+\sigma_y n_y=-1\cdot\tau_{xy}+\sigma_y\cdot0=0$$

所以应力边界条件为　$\sigma_x=-\gamma y,\tau_{xy}=0$

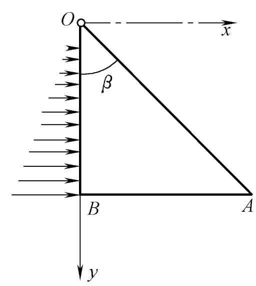


图 13-3　重力水坝截面

13.5 几何方程

弹性体受到外力作用时产生变形。弹性体内各点的应变分量与位移分量之间存在的关系式称为几何方程。设 ε_{xx}、ε_{yy}、ε_{zz}是任意一点 P（x，y，z）在 x、y、z 方向上的线应变；γ_{xy}，γ_{yz}，γ_{xz}分别代表在 x-y，y-z，x-z 面上的切应变。如图 13-4 所示，以 P 点为基点截出一个边长分别为 dx、dy、dz 的微分立方单元体。当物体受力变形时，不仅微元体的棱边长度会随之改变，各棱边间的夹角也要发生变化。为研究方便，可将微元体分别投影到 xOy、yOz、zOx 三个坐标面上分别研究，如图 13-5 所示，投影到 xOy 平面，则形成微分矩形体 $ABCD$。

物体可能发生两种位移，一种是与位置改变有关的刚体位移，另一种是与形状改变有关

的形变位移。在考虑物体的变形时，可以认为物体内各点的位移都是坐标的单值连续函数。在图 13-5 中，A 点沿坐标方向的位移分量为 u、v，则 B 点沿坐标方向的位移分量应分别为 $u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x$ 和 $v+\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x$，而 D 点的位移分量分别为 $u+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$ 及 $v+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y$。据此，可以求得

$$\overline{A'B'}^2=\left(\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\right)^2 \quad (a)$$

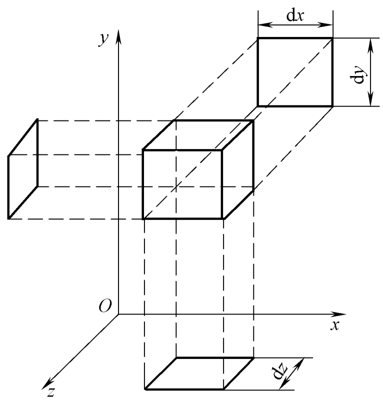


图 13-4　微元体

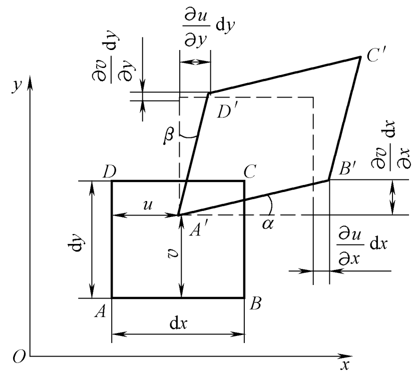


图 13-5　位移与应变

根据线应变的定义，AB 线段的正应变为

$$\varepsilon_x=\frac{\overline{A'B'}-\overline{AB}}{\overline{AB}} \quad (b)$$

因 $\overline{AB}=\mathrm{d}x$，故由式（b）可得　　$\overline{A'B'}=(1+\varepsilon_x)\overline{AB}=(1+\varepsilon_x)\mathrm{d}x$

代入式（a），得

$$2\varepsilon_x+\varepsilon_x^2=2\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \quad (c)$$

由于只是微小变形的情况，可略去式（c）中的高阶微量（即平方项）。这样，

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x} \quad (d)$$

类似地，可以得到 P 点沿 y 方向的正应变

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y} \quad (e)$$

再来分析 AB 和 AD 两线段之间夹角（直角）的变化情况。在微小变形时，变形后 AB 线段的转角为

$$\alpha\approx\tan\alpha=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1+\frac{\partial u}{\partial x}} \quad (f)$$

式中 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 与 1 相比可以略去，故

$$\alpha=\frac{\partial v}{\partial x} \tag{g}$$

同理，AD 线段的转角为

$$\beta=\frac{\partial u}{\partial y} \tag{h}$$

由此可见，AB 和 AD 两线段之间夹角变形后的改变（减小）量为

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} \tag{i}$$

因此，P 点的切应变由两部分组成，一部分是由 y 方向的位移引起的，而另一部分则是由 x 方向位移引起的；并规定角度减小时为正、增大时为负。几何方程完整表示如下：

$$\begin{cases}\varepsilon_{xx}=\dfrac{\partial u}{\partial x},\varepsilon_{yy}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\varepsilon_{zz}=\dfrac{\partial w}{\partial z}\\ \gamma_{xy}=\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x},\gamma_{yz}=\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y},\gamma_{xz}=\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\end{cases} \tag{13-8}$$

不难看出，当物体的位移分量完全确定时，应变分量就被完全确定。但反之，当应变分量完全确定时，位移分量却不完全被确定。这是因为，应变的产生是由于物体内点与点之间存在相对位移，而具有一定形变的物体还可能产生不同的刚体位移。

例 13-2　已知位移函数：$u=y^2$，$v=3yz$，$w=4+6x^2$，单位为 $\mu\varepsilon$。求在点 P（1，0，2）的线应变和切应变分量。

解：点 P（1，0，2）的线应变分量为

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}=0;\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}=6;\varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

点 P（1，0，2）的切应变分量为

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0,\gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=0,\gamma_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=12$$

13.6 相容性条件

变形协调方程也称变形连续方程，或叫作相容方程。它是一组描述六个应变分量之间所存在的关系式。从物理意义上讲，物体在变形前是连续的，那么在变形后仍然是连续的。对于假定材料是连续分布且无裂隙的物体，其位移分量应是单值连续的，即 u、v、w 是单值连续函数。变形后物体内不会因变形而产生空隙。对于前面所讨论的六个应变分量，都是通过三个单值连续函数对坐标求偏导数来确定的。因而，这六个应变分量并不是互不相关的，它们之间必然存在着一定的内在关系。那么各微元体之间的变形必须相互协调，即各应变分量之间必须满足一定的协调条件。六个应变分量之间的关系可以分两组来讨论。由几何方程 $\varepsilon_{xx}=\dfrac{\partial u}{\partial x},\varepsilon_{yy}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\gamma_{xy}=\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}$出发，若对式（13-8）的前两式分别对 y、x 求二阶偏导数，并注意到位移分量是坐标的单值连续函数，有

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}=\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\\
\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^3 v}{\partial y\partial x^2}=\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)
\end{cases}
\tag{a}
$$

两式相加，得

$$
\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\partial y}
\tag{b}
$$

类似地，推导可得到应变分量之间的如下六个微分关系式，即变形协调方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\partial y}\\
\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y\partial z}\\
\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2}=\dfrac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z\partial x}\\
\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\dfrac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}-\dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x\partial y}\\
\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}+\dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}-\dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right)=2\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y\partial z}\\
\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}+\dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\dfrac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right)=2\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z\partial x}
\end{cases}
\tag{13-9}
$$

上述方程从数学上保证了物体变形后仍保持为连续，各微元体之间的变形相互协调，即各应变分量之间满足一定的相容性协调条件。

13.7 物理方程

应力与应变之间的关系方程也叫作本构方程。本构方程只描述材料在外载荷作用下的行为而不是物体的行为。所以，它描述的是同一点的应力状态与它相应的应变状态之间的关系。略去详细的推导过程，对于各向同性的理想线弹性体材料，用应变表示应力的广义胡克定律表达式为

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_x&=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_x+\mu(\varepsilon_y+\varepsilon_z)]\\
\sigma_y&=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_y+\mu(\varepsilon_z+\varepsilon_x)]\\
\sigma_z&=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_z+\mu(\varepsilon_x+\varepsilon_y)]\\
\tau_{xy}&=G\cdot\gamma_{xy}\\
\tau_{yz}&=G\cdot\gamma_{yz}\\
\tau_{xz}&=G\cdot\gamma_{xz}
\end{aligned}
\right\}
\tag{13-10}
$$

而用应力表示应变的广义胡克定律表达式在材料力学已经给出。

13.8 用位移表达的平衡微分方程

将应力和应变之间的关系式（13-10）代入平衡微分方程（13-5）可以得到用应变表示的平衡微分方程。进一步，再考虑描述应变与位移关系的几何方程，可以推导出位移平衡微分方程，其形式为

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+G)\frac{\partial\Delta}{\partial x}+G\nabla^2 u=0\\(\lambda+G)\frac{\partial\Delta}{\partial y}+G\nabla^2 v=0\\(\lambda+G)\frac{\partial\Delta}{\partial z}+G\nabla^2 w=0\end{aligned}\right\}\tag{13-11}$$

式中，$\lambda=\dfrac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$称为一阶拉梅常数，$G$为切变模量也称为二阶拉梅常数，$\theta=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}$表示体积应变，$\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$表示拉普拉斯算子。上述用位移表达的平衡微分方程涉及应力、应变以及应力和应变关系，反映了弹性体的力学特征、几何特征和物理特征。

13.9 弹性力学问题的一般求解方法

根据前面的讨论可知，弹性力学问题中共有 15 个待求的基本未知量，即 6 个应力分量、6 个应变分量、3 个位移分量，而基本方程也正好有 15 个，即平衡微分方程 3 个、几何方程或变形协调方程 6 个（几何方程和变形协调方程实质上是等效的，两者只能应用其中之一）、物理方程 6 个。于是，15 个方程中有 15 个未知函数，加上边界条件用于确定积分常数，原则上讲，这些方程足以求解各种弹性力学问题。可以证明，当这些方程的解答存在时，只要不考虑刚体位移，则所求得的解将是唯一的。但是，在实际求解时，其数学上的计算难度仍然是很大的。事实上，只是对一些简单的问题才可进行解析求解，而对大量的工程实际问题，一般都要借助于数值方法来获得数值解或半数值解。

求解弹性力学问题主要有两种不同的途径。一种是按位移求解，另一种是按应力求解。按位移求解就是先以位移分量为基本未知函数，求得位移分量之后再用几何方程求出应变分量，继而用物理方程求得应力分量。从原则上讲，按位移求解可以适用于任何边界问题，不管是位移边界问题还是应力边界问题、或者是混合边界问题，所以对某些重要问题，虽然不能按位移求解方式得到具体的、详尽的解答，但却可以得出一些普遍的重要结论，这是按应力求解时所不能办到的。事实上，在很多情况下，按位移求解也比较方便，只要所确定的位移函数是单值连续的，那么用几何方程所求得的应变分量就必定满足相容方程。但是，关键的问题是由位移分量和应变分量所确定的应力分量还必须要满足平衡微分方程，所以，按位移求解弹性力学问题时，往往要比按应力求解更难于处理。这是按位移求解的缺点所在，也就是按位移求解尚不能得到很多有用解答的原因。然而，值得指出的是，在有限单元法中，

按位移求解则是一种比较简单而普遍适用的求解方式，本书中所介绍的有限单元法都是以这种位移解法为出发点。

求解弹性力学问题的另一种方式是按应力求解，即先以6个应力分量为基本未知量，求得满足平衡微分方程的应力分量之后，再通过物理方程和几何方程求出应变分量和位移分量。需要特别注意的是，应使所求得的应变分量满足相容方程，否则将会因变形不协调而导致错误。此外，应力分量在边界上还应当满足应力边界条件。由于位移边界条件一般是无法改用应力分量来表示的，所以，对于位移边界问题和混合边界问题，一般都不可能按应力求解得到精确的解答。因此，用弹性力学求解某一具体问题，就是设法寻求弹性力学基本方程的解，并使之满足该问题的所有边界条件。然而，要在各种具体条件下寻求问题的精确解答，实际上是很困难的。研究发现，对一些重要的实际问题，只要对其应力或应变的分布做若干简化，则求解将变得比较简单。为此，通常可以根据求解对象的几何形状和受载情况，将具体问题简化为平面问题（可进一步分为平面应力问题和平面应变问题）、轴对称问题、板壳问题等。

13.10 用位移平衡微分方程求解平面问题

当位移为基本未知量时，求解平面问题需要平衡微分方程和边界条件。以平面应力问题（$\sigma_z=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$）为例，其物理方程简化为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)\\ \sigma_y&=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x)\\ \tau_{xy}&=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{13-12}$$

将平面问题几何方程代入式（13-12）得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\ \sigma_y&=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\ \tau_{xy}&=\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}\tag{13-13}$$

将方程（13-13）代入应力平衡微分方程（13-5），得

$$\left.\begin{aligned}\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)+X=0\\ \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+Y=0\end{aligned}\right\}\tag{13-14}$$

式（13-14）即为位移法求解平面应力问题的基本微分方程。

在用位移为基本变量求解时，会碰到两类边界条件，即位移边界条件：

$$u_s=\bar{u},v_s=\bar{v}\tag{13-15}$$

和应力边界条件

$$\left.\begin{aligned}n_x(\sigma_x)_s+n_y(\tau_{xy})_s+\overline{X}=0\\n_y(\sigma_y)_s+n_x(\tau_{xy})_s+\overline{Y}=0\end{aligned}\right\}\tag{13-16}$$

此时应力边界条件需要用位移表示，将式（13-13）代入应力边界条件（13-16）整理得

$$\left.\begin{aligned}\frac{E}{1-\mu^2}\left[n_x\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+n_y\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]_s+\overline{X}=0\\\frac{E}{1-\mu^2}\left[n_y\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+n_x\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]_s+\overline{Y}=0\end{aligned}\right\}\tag{13-17}$$

这就是用位移分量来表达的应力边界条件。综上所述，按位移求解平面应力问题时，应使位移分量满足以位移表达的平衡微分方程（13-14），并在边界上满足位移边界条件式（13-15）或以位移分量表达的应力边界条件式（13-17）。求出了位移分量以后，再由几何方程求出应变，用物理方程求出应力。

对于平面应变问题，只需在上面的各个方程中将 E 换成$\dfrac{E}{1-\mu^2}$，将 μ 换成$\dfrac{\mu}{1-\mu}$。

按位移法求解平面问题需要处理两个偏微分方程，较为复杂，甚至不能得到确切解。但这种方法可以对所求问题进行宏观描述，因此可以得到一些有价值的结论。

13.11 利用相容性条件按应力求解平面问题

弹性力学平面问题的几何方程简化为

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\ \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\tag{13-18}$$

上述几何方程的前两项分别对 y 和 x 求二阶偏导并相加，得

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\tag{13-19}$$

式（13-19）最后一项为$\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=\gamma_{xy}$，因此可以得到如下方程，即相容方程中的第一式

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\gamma_{xy}\tag{13-20}$$

为了保证弹性体内任一点都有确定的位移，且同一点不可能有两个不同的位移，应变分量 ε_x、ε_y、γ_{xy}应满足相容性方程，否则变形后微元体之间有可能出现开裂与重叠。将平面问题的物理方程（13-12）代入式（13-20）得

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x-\mu\sigma_y)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y-\mu\sigma_x)=2(1+\mu)\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}\tag{13-21}$$

根据平面问题的平衡微分方程的简化形式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+X=0\\\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+Y=0\end{aligned}\right\}\tag{13-22}$$

上面两式分别对 x 和 y 求偏导数，然后相加并整理得

$$2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}=-\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}\right) \tag{13-23}$$

将式（13-23）代入式（13-21）并整理得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=-(1+\mu)\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right) \tag{13-24}$$

式（13-24）即为通过相容性条件按应力求解平面问题的方程。对于平面应变问题，只要将式（13-24）中 μ 换成 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 即可。

13.12 Airy 应力函数

在一个弹性体内，应力分量应该满足相容方程、平衡微分方程和应力边界条件。对于平面问题的应力平衡微分方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+X=0\\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+Y=0\end{aligned}\right\} \tag{13-25}$$

它的解包含两部分：特解和通解。构造齐次微分方程

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=0 \tag{13-26}$$

得到上述两方程的通解为

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},\sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \tag{13-27}$$

选择如下形式的特解：

$$\sigma_x=-Xx,\sigma_y=-Yy,\tau_{xy}=0 \tag{13-28}$$

则整个平衡微分方程的全解为

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-Xx,\quad \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-Yy,\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \tag{13-29}$$

式中，$\varphi(x,y)$ 是平面问题的应力函数。这个辅助函数首先由 G. B. Airy 提出。应力函数方法对求解平面问题较为有效。应力分量也应满足相容方程。对于平面问题，假如体积力可以忽略，考虑相容性条件的平衡方程（13-24）可以简化为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0 \tag{13-30}$$

把包含应力函数的应力全解式（13-29）代入式（13-30），得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-Xx+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-Yy\right)=0 \tag{13-31}$$

忽略体积力，式（13-31）进一步简化为

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0 \tag{13-32}$$

式（13-32）即为用应力函数 φ（x，y）表达的相容性方程。

考虑到 $X=0$，$Y=0$，按应力函数进行求解，得到如下式子：

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},\ \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\ \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \tag{13-33}$$

用上述方法计算出应力后，再进一步计算出应变，最后通过应变计算出位移。

应力函数的创建需要一定的经验，不同的问题应使用不同的应力函数。为简便起见，可以采用多项式形式创建应力函数以对简单的弹性力学问题求解。考虑几个平面问题的例子，设不计体力，即 $X=0$，$Y=0$。

（1）$\varphi=a+bx+cy$

这是一个最简单的线性应力函数，不管系数取何值，对于应力函数的相容方程总是满足的。根据式（13-33），可得各应力分量为

$$\sigma_x=0,\sigma_y=0,\tau_{xy}=0$$

因此，线性应力函数对应于无应力、无体力和无面力的状态。

（2）$\varphi=ax^2+bxy+cy^2$

此二次多项式在任何情况下都满足相容方程。分别讨论如下：

1）设 $\varphi=ax^2$，由式（13-33）得应力分量：$\sigma_x=0$，$\sigma_y=2a$，$\tau_{xy}=0$。这种应力状态对应长方形平板沿 y 轴受拉力或压力的情况，如图 13-6a 所示。

2）设 $\varphi=bxy$，可以得到 $\sigma_x=0$，$\sigma_y=0$，$\tau_{xy}=-b$。这种应力状态对应于长方形平板沿四周作用剪切力，如图 13-6b 所示。

3）设 $\varphi=cy^2$，与 $\varphi=ax^2$ 时的状态相似，作用力的方向变成 x 轴，如图 13-6c 所示。

（3）$\varphi=ay^3$

可以证明，上式在任何情况下都满足应力函数相容方程。可以求得 $\sigma_x=6ay$，$\sigma_y=0$，$\tau_{xy}=0$。

这种应力状态下对应梁弯曲情况，如图 13-7 所示。

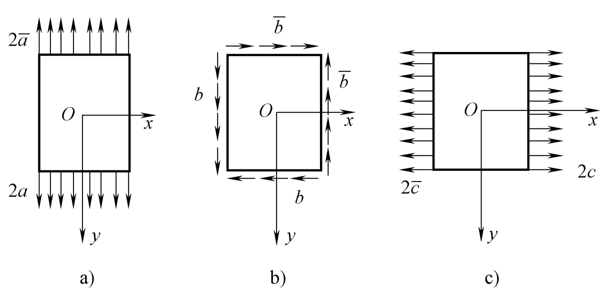


图 13-6　应力函数为三阶多项式的讨论

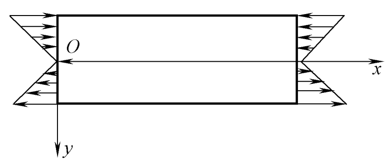


图 13-7　应力函数为三阶多项式的讨论

13.13　位错的应力场

位错就是晶体中的线缺陷，可以分为刃型位错、螺型位错和混合型位错。晶体在结晶时

受到杂质、温度变化或振动产生的应力作用，或由于晶体受到打击、切削、研磨等机械应力的作用，使晶体内部质点排列变形，原子行间相互滑移，而不再符合理想晶体的有秩序的排列，由此形成的缺陷称位错。位错是原子的一种特殊组态，是一种具有特殊结构的晶格缺陷，因为它在一个方向上尺寸较长，所以被称为线状缺陷。

晶体中存在位错时，位错线附近的原子偏离了正常位置，引起点阵畸变，从而产生应力场。在位错的中心部，原子排列特别紊乱，超出弹性变形范围，胡克定律已不适用。中心区外，位错形成的弹性应力场可用各向同性连续介质的弹性理论来处理。分析位错应力场时，常设想把半径约为 0.5~1nm 的中心区挖去，而在中心区以外的区域采用弹性连续介质模型导出应力场公式。

1. 螺型位错的应力场

如图 13-8 所示，设想在简单立方晶体右端施加一切应力，使右端 *ABCD* 滑移面上下两部分晶体发生一个原子间距的相对切变，在已滑移区与未滑移区的交界处，*AB* 线两侧的上下两层原子发生了错排和不对齐现象，它们围绕着 *AB* 线连成了一个螺旋线，而被 *AB* 线所贯穿的一组原来是平行的晶面则变成了一个以 *AB* 线为轴的螺旋面。

采用弹性连续介质模型时，螺型位错可以简化为一个空心圆柱体的位错线沿 z 轴，柏氏矢量为 $\boldsymbol{b}$，滑移面为 xOz，如图 13-9 所示。螺型位错的变形是纯剪切，在弹性理论中属于反平面问题，即

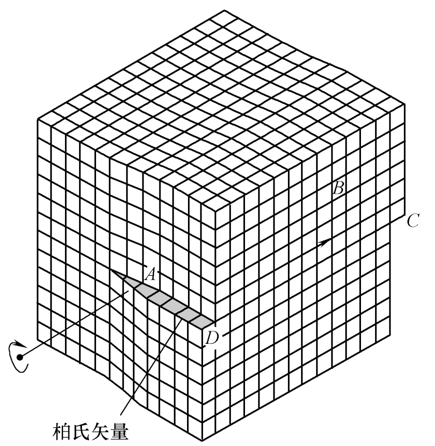


图 13-8 螺型位错的几何示意图

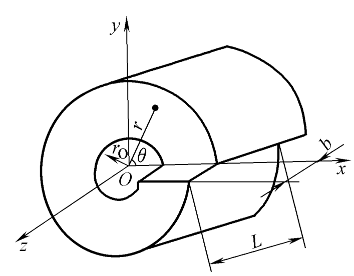


图 13-9 螺型位错的连续介质模型

$$u_x = u_y = 0, u_z = f(x, y)$$

代入位移表示的平衡微分方程（13-14）并令其满足位移边界条件：$(u_z)_{\theta=2\pi} - (u_z)_{\theta=0} = b$ 可以求得位移解

$$u_z = \frac{b}{2\pi}\theta \tag{13-34}$$

由于圆柱只在 z 方向有位移，x、y 方向无位移，所以其余应力分量为零。采用圆柱坐标系，在距离中心 r 处的切应力为

$$\tau_{z\theta} = \frac{G \cdot b}{2\pi r}, \tau_{zr} = 0 \tag{13-35}$$

显然，螺型位错应力场是径向对称的。即：同一半径上的切应力相等。

螺型位错应力场特点：没有正应力分量；切应力分量只与距位错中心距离 r 有关，距中心越远，切应力分量越小；切应力对称分布，与位错中心等距的各点应力状态相同。

2. 刃型位错应力场

如图 13-10 所示，设有一简单立方结构的晶体，在切应力的作用下发生局部滑移，发生局部滑移后晶体内在垂直方向出现了一个多余的半原子面，显然在晶格内产生了缺陷，这就是位错，这种位错在晶体中有一个刀刃状的多余半原子面，所以称为刃型位错。

设想有一个刃型位错，其位错线正向沿 z 轴，其柏氏矢量沿正 x 轴。在连续介质中，可以简化为如图 13-11 所示的模型：将一个空心圆柱体沿 xOz 平面切开，令上、下两个切面沿 x 方向相对位错一个柏氏矢量长度 b 再黏合在一起。这样得到位错线沿 z 轴，b 在 x 方向，为正刃位错。根据问题的几何特点，引入应力函数：

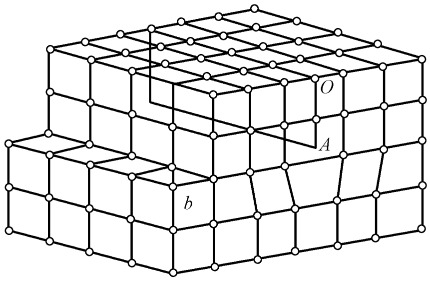


图 13-10　刃型位错的几何示意图

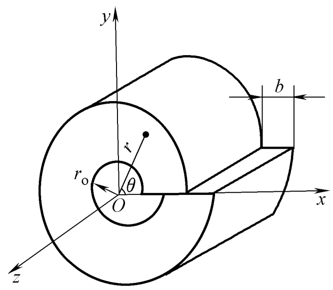


图 13-11　刃型位错的连续介质模型

$$\Phi = F(r)\sin\theta \tag{13-36}$$

它必须满足相容方程，因此将上述应力函数代入 $\nabla^4\Phi = 0$ 可得

$$F(r) = A\cdot r\ln r + B\cdot\frac{1}{r} + C\cdot r^3 + D\cdot r \tag{13-37}$$

考虑到在 $\theta=0$ 和 $\theta=2\pi$ 时，位移必须不同，可以对式（13-37）进一步简化，最后得到刃型位错应力场公式：

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{Gb}{2\pi(1-\mu)}\cdot\frac{y(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\\
\sigma_y &= \frac{Gb}{2\pi(1-\mu)}\cdot\frac{y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\\
\sigma_z &= \mu(\sigma_x+\sigma_y)\\
\tau_{xy} &= \frac{Gb}{2\pi(1-\mu)}\cdot\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\\
\tau_{xz} &= \tau_{yz} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{13-38}$$

刃型位错周围的应力场如图 13-12 所示，其特点为：

1） 正应力分量与切应力分量同时存在。

2） 各应力分量均与 z 值无关，表明与刃型位错线平行的直线上各点应力状态相同。

3） 应力场对称于 y 轴（多余半原子面）。

4）当 $y=0$ 时，$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=0$，即在滑移面上无正应力，只有切应力，且切应力最大。

5）当 $y>0$ 时，$\sigma_{xx}<0$；当 $y<0$ 时，$\sigma_{xx}>0$，即在滑移面上侧 x 方向为压应力，而在滑移面下侧 x 方向为拉应力。

6）当 $x=$□y 时，σ_{yy}及 τ_{xy}均为零。

7）在刃型位错正上方（$x=0$）有一个纯压缩区，而在多余原子面底边的下方是纯拉伸区。

8）沿滑移面（$y=0$）应力是纯剪切的。

9）在围绕位错的其他位置，应力场既有剪切分量，又有拉伸或压缩分量。

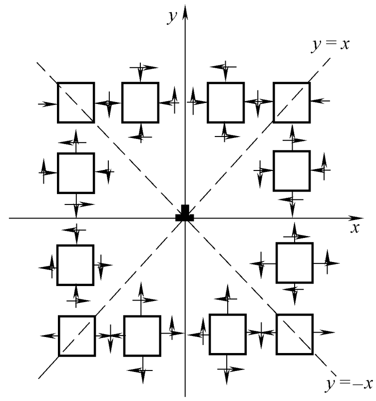


图 13-12　刃型位错周围的应力场

本 章 小 结

1. 主要介绍弹性力学的基本概念，主要包括应力、应变的定义和性质，应力平衡方程、几何方程和物理方程。

2. 简要讨论了弹性力学问题的两种基本求解方法和步骤，即：基于应力的求解方法和基于位移的求解方法。

3. 简要介绍了弹性力学平面问题的应力函数法。

4. 介绍了位错应力场的基本理论。

5. 本章涉及的基本原理和基本方法：

1）微分单元体平衡分析法，不再依靠材料力学中的平面假设，而是通过求解微分方程得到解答。这个方法为分析复杂的弹性物体受外载荷作用下的应力、应变响应提供了普遍适用的手段。

2）应力函数解法，由于弹性力学问题的偏微分方程非常复杂，一般无法得到任意问题的解析解，而采用应力函数的逆解法和半逆解法，可以对某些问题得到一些有价值的结论。

思 考 题

13-1　弹性力学与材料力学在研究内容、基本任务、研究对象以及研究方法上有何异同？

13-2　用弹性力学求解弹性平面问题时，需要哪些方程和边界条件？解题步骤是什么？

13-3　采用应力函数法可以求解什么弹性力学问题？

13-4　求解弹性力学控制微分方程的方法有基于位移的解法和基于应力的解法，是否可以有基于应变的解法？为什么？（提示：从控制微分方程和边界条件来讨论）。

13-5　弹性力学中的几何方程有什么作用？在推导几何方程过程中忽略了什么项？在大变形、大应变条件下几何方程的表达式会发生变化吗？

13-6　什么是刃位错和螺位错？两种位错的应力场各有什么特点？

13-7　晶体的实际强度为什么远低于理论强度？

【参考答案：这是因为实际晶体的塑性变形是通过局部滑移进行的，故所加外力仅需破坏局部区域滑

移面两边原子的结合键，而此局部区域是有缺陷（位错）的区域，此处原子本来就处于亚稳状态，只需很低的外应力就能离开平衡位置，发生局部滑移。】

13-8　晶体为什么会加工硬化？

【参考答案：这是因为晶体在塑性变形过程中位错密度不断增加，使弹性应力场不断增大，位错间的交互作用不断增强，因而位错的运动越来越困难。具体说，引起晶体加工硬化的机制有：位错的塞积、位错的交割（形成不易或不能滑移的割阶）、易开动的位错源不断被消耗。】

习　题

13-1　试在大变形、大应变条件下推导几何方程中线应变 ε_x 和位移分量 u、v、w 之间的微分关系。

13-2　如图 13-13 所示三角形截面水坝材料的比重为 γ，水的比重为 γ_1。已求得应力解为

$$\sigma_x=ax+by,\sigma_y=cx+dy-\gamma y,\tau_{xy}=-dx-ay$$

试根据直边及斜边上的边界条件，确定常数 a、b、c、d。

（提示：列出 OA、OB 两边的应力边界条件。）

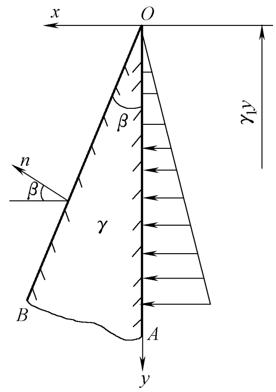


图 13-13　题 13-2 图

13-3　已知一点处的应力矩阵为 $\begin{bmatrix}12 & 6 & 0\\ 6 & 10 & 0\\ 0 & 0 & -20\end{bmatrix}$，应力单位为 MPa。试求该点的主应力及其主方向。

13-4　设一物体的各点发生如下的位移

$$\begin{cases}u=a_0+a_1x+a_2y+a_3z\\ v=b_0+b_1x+b_2y+b_3z\\ w=c_0+c_1x+c_2y+c_3z\end{cases}$$

式中 a_0、a_1、…、c_1、c_2 均为常数，试证各点的应变分量为常数。

（提示：将已知位移分量函数式分别代入几何方程得。）

13-5　设已知下列位移，试求指定点的应变状态。

（1）在（0，2，1）点处：$\begin{cases}u=(3x^2+20)\times10^{-2}\\ v=(4yx)\times10^{-2}\\ w=0\end{cases}$

（2）在（1，3，4）点处：$\begin{cases}u=(6x^2+15)\times10^{-2}\\ v=(8zy)\times10^{-2}\\ w=(3z^2-2xy)\times10^{-2}\end{cases}$

13-6　试说明下列应变状态是否可能（式中 a、b、c 均为常数）

（1）$\varepsilon_x=c(x^2+y^2)$，$\varepsilon_y=cy^2$，$\varepsilon_z=0$，$\gamma_{xy}=cxy$，$\gamma_{xz}=0$，$\gamma_{yz}=0$；

（2）$\varepsilon_x=axy^2$，$\varepsilon_y=ax^2y$，$\varepsilon_z=0$，$\gamma_{xy}=0$，$\gamma_{xz}=ax^2+by^2$，$\gamma_{yz}=az^2+by^2$。

13-7　设图 13-14 中的三角形悬臂梁只受重力作用。而梁的比重为 p，试用纯三次式：$\varphi=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$ 的应力函数求解应力分量。

13-8　图 13-15 所示为处于平面应力状态下的细长薄板条，上下边界受 F 力的作用，其余边界上均无面力作用。试证明 A 点处为零应力状态。

13-9　验证刃位错应力场的应力分量满足相容方程 $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0$

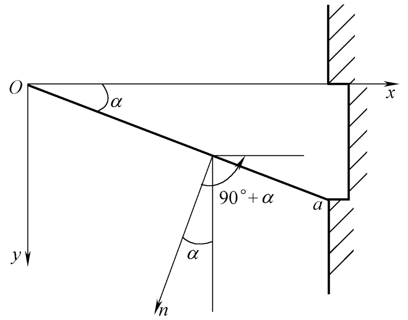


图 13-14　题 13-7 图

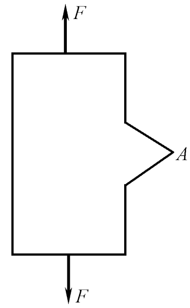


图 13-15　题 13-8 图

附录

附录 A 平面图形的几何性质

不同受力形式下杆件的应力和变形，不仅取决于外力的大小以及杆件的尺寸，而且与杆件截面的几何性质有关。当研究杆件的应力、变形，以及研究失效问题时，都要涉及与截面形状和尺寸有关的几何量。这些几何量包括：形心、静矩、惯性矩、惯性半径、极惯性矩、惯性积、主轴等，统称为“平面图形的几何性质”。研究上述这些几何性质时，完全不考虑研究对象的物理和力学因素，作为纯几何问题加以处理。

A.1 静矩和形心

静矩：平面图形面积对某坐标轴的一次矩，如图 A-1 所示。

定义式：

$$S_x = \int_A y\mathrm{d}A, S_y = \int_A x\mathrm{d}A \qquad (A\text{-}1)$$

量纲为长度的三次方。

由于均质薄板的重心与平面图形的形心有相同的坐标 x_C 和 y_C。则

$$A \cdot x_C = \int_A x \cdot \mathrm{d}A = S_y, A \cdot y_C = \int_A y \cdot \mathrm{d}A = S_x$$

由此可得薄板重心的坐标 x_C 和 y_C 分别为

$$x_C = \frac{\int_A x\mathrm{d}A}{A} = \frac{S_y}{A},\ y_C = \frac{\int_A y\mathrm{d}A}{A} = \frac{S_x}{A}$$

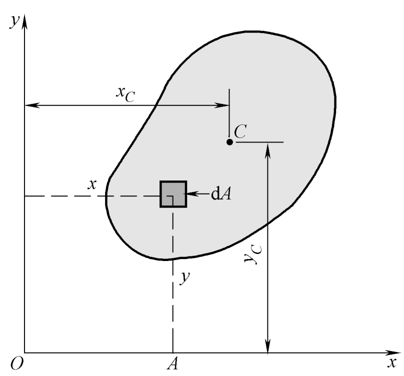


图 A-1 静矩的概念

所以形心坐标

$$x_C = \frac{S_y}{A}, y_C = \frac{S_x}{A} \qquad (A\text{-}2)$$

或

$$S_y = A \cdot x_C, S_x = A \cdot y_C$$

由式（A-2）得知，若某坐标轴通过形心轴，则图形对该轴的静矩等于零，即 $y_C = 0$，

$S_x=0$；$x_C=0$，则 $S_y=0$；反之，若图形对某一轴的静矩等于零，则该轴必然通过图形的形心。静矩与所选坐标轴有关，其值可能为正，负或零。

例 A-1 求图 A-2 所示抛物线图形的 S_x、S_y及形心位置。设抛物线的方程为

$$y=f(x)=h\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)$$

解：先取平行于 y 轴的狭长条作为微面积 dA，则有

$$dA=ydx=h\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)dx$$

所以

$$A=\int_A dA=\int_0^b h\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)dx=\frac{2bh}{3}$$

$$S_x=\int_A ydA=\int_0^b \frac{h^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)^2dx=\frac{4bh^2}{15}$$

$$S_y=\int_A xdA=\int_0^b hx\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)dx=\frac{b^2h}{4}$$

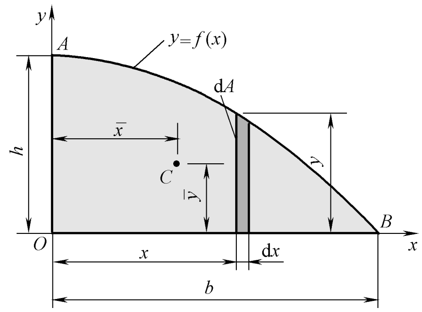


图 A-2 平面图形及其形心

形心位置：

$$x_C=\frac{S_y}{A}=\frac{3b}{8},y_C=\frac{S_x}{A}=\frac{2h}{5}$$

如一个平面图形是由几个简单平面图形组成，称为组合平面图形，如图 A-3 所示。设第 i 块分图形的面积为 A_i，形心坐标为 y_{Ci}、z_{Ci}，则其静矩和形心坐标分别为

$$S_x=\sum_{i=1}^{n}A_iy_{Ci},S_y=\sum_{i=1}^{n}A_ix_{Ci} \tag{A-3}$$

$$y_C=\frac{S_x}{A}=\frac{\sum_{i=1}^{n}A_iy_{Ci}}{\sum_{i=1}^{n}A_i},x_C=\frac{S_y}{A}=\frac{\sum_{i=1}^{n}A_ix_{Ci}}{\sum_{i=1}^{n}A_i} \tag{A-4}$$

例 A-2 组合图形如图 A-4 所示，确定其形心位置。

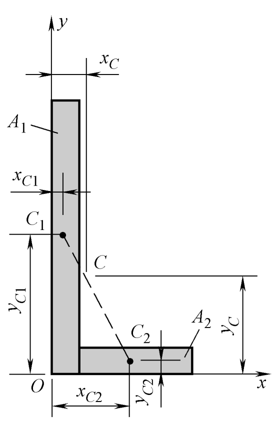


图 A-3 组合平面图形形心

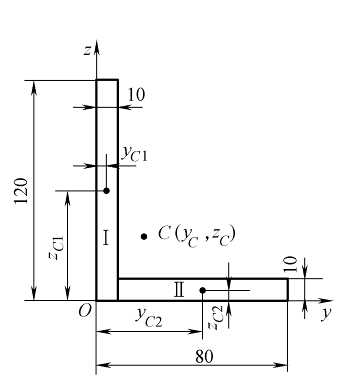


图 A-4 两个矩形的组合图形

解：将组合图形看作由两个矩形Ⅰ和Ⅱ组成，在图示坐标下每个矩形的面积及形心位置分别为

矩形Ⅰ：

$$A_1=120\text{mm}\times10\text{mm}=1200\text{mm}^2$$

$$y_{C1}=\frac{10}{2}\text{mm}=5\text{mm},\quad z_{C1}=\frac{120}{2}\text{mm}=60\text{mm}$$

矩形Ⅱ：

$$A_2=70\text{mm}\times10\text{mm}=700\text{mm}^2$$

$$y_{C2}=10\text{mm}+\frac{70\text{mm}}{2}=45\text{mm},\quad z_{C1}=\frac{10\text{mm}}{2}=5\text{mm}$$

整个图形形心 C 的坐标为

$$\begin{aligned} y_C &=\frac{A_1y_{C1}+A_2y_{C2}}{A_1+A_2}\\ &=\frac{1200\times5+700\times45}{1200+700}\text{mm}\\ &=19.7\text{mm}\\ z_C &=\frac{A_1z_{C1}+A_2z_{C2}}{A_1+A_2}\\ &=\frac{1200\times60+700\times5}{1200+700}\text{mm}\\ &=39.7\text{mm}\end{aligned}$$

A.2 惯性矩和惯性半径

惯性矩：平面图形对某坐标轴的二次矩，如图 A-5 所示。惯性矩定义为

$$I_y=\int_A z^2\mathrm{d}A,I_z=\int_A y^2\mathrm{d}A \qquad (\text{A-5})$$

其量纲为长度的四次方，恒为正。相应地，定义

$$i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}},i_z=\sqrt{\frac{I_z}{A}} \qquad (\text{A-6})$$

分别为图形对 y 轴和对 z 轴的惯性半径。

对于组合图形，设 I_{yi}、I_{zi} 为第 i 个分图形的惯性矩，则总图形对同一轴惯性矩为

$$I_y=\sum_{i=1}^{n}I_{yi},I_z=\sum_{i=1}^{n}I_{zi} \qquad (\text{A-7})$$

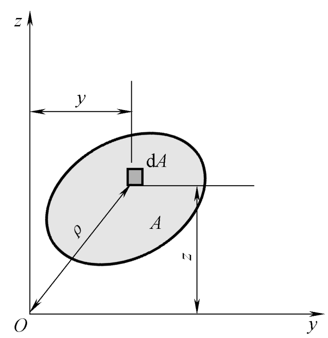


图 A-5　平面图形对坐标轴的惯性矩

若以 ρ 表示微元面积 $\mathrm{d}A$ 到坐标原点 O 的距离，则定义图形对坐标原点 O 的极惯性矩

$$I_\rho=\int_A\rho^2\mathrm{d}A \qquad (\text{A-8})$$

考虑到 $\rho^2=y^2+z^2$，所以极惯性矩与（轴）惯性矩有关系

$$I_\rho=\int_A(y^2+z^2)\mathrm{d}A=I_y+I_z \qquad (\text{A-9})$$

这表明，图形对任意两个互相垂直轴的惯性矩之和，等于它对该两轴交点的极惯性矩。

$$I_{yz} = \int_A yz\mathrm{d}A \tag{A-10}$$

定义为图形对一对正交轴 y 、z 轴的惯性积。其量纲是长度的四次方。

例 A-3 求图 A-6 所示圆形截面和图 A-7 所示空心圆截面的 I_ρ、I_y、I_z。

解：如图 A-6 所示圆形截面取环形微分面积 dA，根据定义，有

$$I_\rho = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = \int_0^{\frac{D}{2}} \rho^2 \cdot 2\pi\rho \cdot \mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^{\frac{D}{2}} \rho^3 \mathrm{d}\rho = \frac{\pi D^4}{32} \approx 0.1D^4 \tag{A-11}$$

由于轴对称性，则有 $I_y = I_z$

所以，

$$I_y = I_z = \frac{I_\rho}{2} = \frac{\pi D^4}{64} \tag{A-12}$$

对于图 A-7 所示空心圆截面，其外径为 D，内径为 d，可以采用相同的积分方法，则

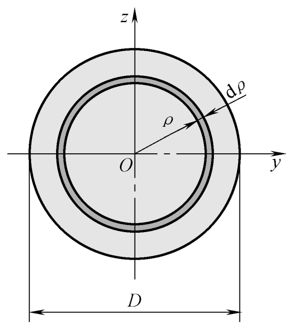


图 A-6 圆形对坐标轴的惯性矩

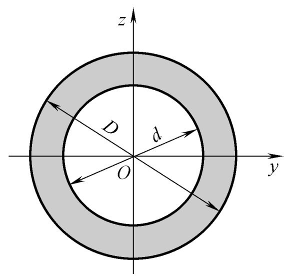


图 A-7 圆环对坐标轴的惯性矩

$$I_\rho = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = \int_{d/2}^{D/2} \rho^2 \cdot 2\pi\rho \cdot \mathrm{d}\rho = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4) \tag{A-13}$$

式中，$\alpha = d/D$ 为内、外径之比。

由于轴对称性，则有

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4) \tag{A-14}$$

A.3 平行移轴公式

由于同一平面图形对于相互平行的两对直角坐标轴，当其中一对轴是图形的形心轴（y_C，z_C）时，如图 A-8 所示，则可得到这两对平行轴直接惯性矩的关系式。简单证明之：

$$I_y = \int_A z^2 \mathrm{d}A = \int_A (z_C + a)^2 \mathrm{d}A = \int_A {z_C}^2 \mathrm{d}A + 2a\int_A z_C \mathrm{d}A + a^2 \int_A \mathrm{d}A$$

式中，$\int_A z_C \mathrm{d}A$ 为图形对形心轴 y_C 的静矩，其值应等于零，则得

$$I_y = I_{y_C} + a^2 A \tag{A-15}$$

式中，a 表示 y 轴与 y_C 轴之间的距离。同理可证：

$$I_z = I_{z_C} + b^2 A \tag{A-16}$$

结论：同一平面内对所有相互平行的坐标轴的惯性矩，对形心轴的最小。在使用惯性积移轴公式时应注意 a、b 的正负号。

例 A-4 已知图 A-9 所示三角形关于底边轴惯性矩 $I_y = bh^3/12$。求此三角形关于顶轴 y_1 的惯性矩。

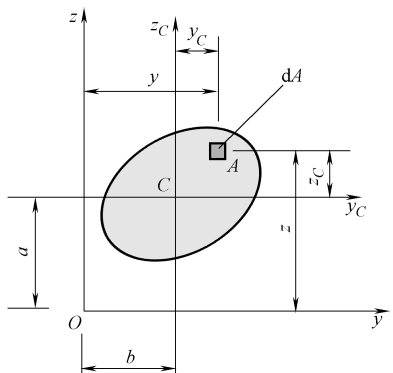


图 A-8 平面图形平行移轴

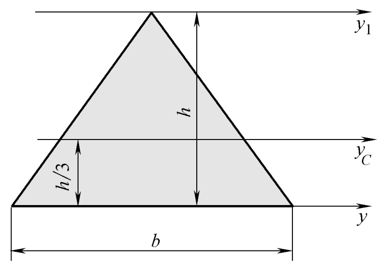


图 A-9 三角形关于两根平行轴的惯性矩

解：（1）先求过形心轴的惯性矩

$$I_y = I_{yC} + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \times \frac{bh}{2} = I_{yC} + \frac{bh^3}{18}$$

所以

$$I_{yC} = I_y - \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{36}$$

（2）再次利用平行移轴公式，得

$$I_{y1} = I_{yC} + \left(\frac{2h}{3}\right)^2 \times \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{4}$$

A.4 转轴公式 主惯性轴

1. 惯性矩及惯性积的转轴公式

任意平面图形（图 A-10）对 y 轴和 z 轴的惯性矩和惯性积，可由式（A-5）和式（A-10）求得，若将坐标轴 y、z 绕坐标原点 O 点旋转 α 角，且以逆时针转角为正，则新旧坐标轴之间应有如下关系：

$$\begin{cases} y_1 = y\cos\alpha + z\sin\alpha \\ z_1 = z\cos\alpha - y\sin\alpha \end{cases}$$

将此关系代入惯性矩及惯性积的定义式，则可得相应量的新、旧转换关系，即转轴公式：

$$\begin{cases} I_{y_1} = \int_A z_1^2 \mathrm{d}A = \dfrac{I_y + I_z}{2} - \dfrac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha \\ I_{z_1} = \dfrac{I_y + I_z}{2} - \dfrac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha \\ I_{y_1z_1} = \dfrac{I_y - I_z}{2}\sin 2\alpha + I_{yz}\cos 2\alpha \end{cases} \tag{A-17}$$

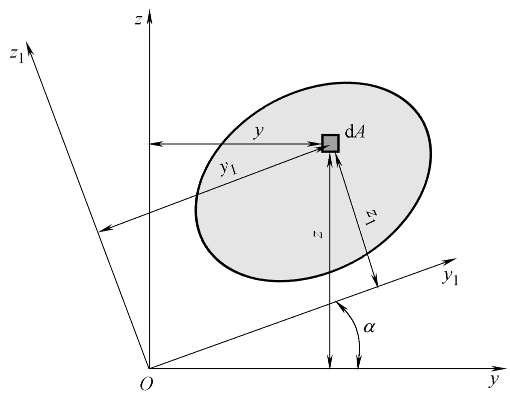


图 A-10 平面图形旋转变换

2. 主惯性矩

若令 α_0 是惯性矩为极值时的方位角，相应的直角坐标轴为 y_0 和 z_0。则由条件 $\mathrm{d}I_{y_1}/\mathrm{d}\alpha=0$，可得

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} \tag{A-18}$$

由式（A-18）可以求出 α_0 和 $\alpha_0+\dfrac{\pi}{2}$ 以确定一对互相垂直的主惯性轴 y_0 和 z_0。由式（A-18）求出 $2\alpha_0$ 后，代回到式（A-17）的前两式，即可得到惯性矩得两个极值，称为主惯性矩。主惯性矩的计算公式为

$$\begin{cases} I_{y_0} = \dfrac{I_y + I_z}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} \\ I_{z_0} = \dfrac{I_y + I_z}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} \end{cases} \tag{A-19}$$

此时，必然有式（A-17）的第三式为零。即，当惯性矩取得极值时，相应的惯性积必然为零。

3. 主惯性轴、主惯性矩的确定及其特性

（1）如果平面图形有对称轴，此对称轴以及另一与对称轴相垂直的轴一定是主惯性轴（因为关于对称轴的惯性积必然为零），而关于这两个主惯性轴的惯性矩就是主惯性矩。进一步，如果两个主惯性轴通过平面图形的形心 C，则将这两个轴称为形心主惯性轴，而关于这两个轴的惯性矩称为形心主惯性矩。

（2）如果平面图形没有对称轴，则可以基准点 O 为坐标原点，任作一对互相垂直的坐标轴 y 和 z 为参考轴，并求出图形对参考轴 y 和 z 的惯性矩 I_y、I_z 和惯性积 I_{yz}。于是，图形通过点 O 的一对主惯性轴方位角 α_0 及主惯性矩 I_{y_0}、I_{z_0} 分别通过式（A-18）和式（A-19）加以确定。

（3）图形对通过同一坐标原点任意一对相互垂直坐标轴的两个轴惯性矩之和为常量，等于图形对原点的极惯性矩，即

$$I_{y_1} + I_{z_1} = I_y + I_z = I_\mathrm{p} \tag{A-20}$$

因而两个主惯性矩中必然一个为极大值，另一个为极小值。

例 A-5 确定图形的形心主惯性轴位置，并计算形心主惯性矩（见图 A-11）。

解：（1）首先确定图形的形心。利用平行移轴公式分别求出各矩形对 y 轴和 z 轴的惯性矩和惯性积

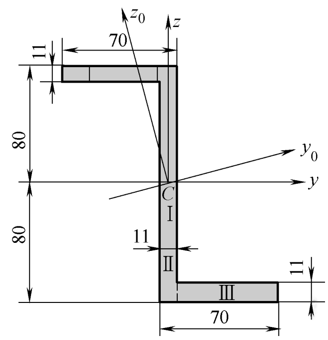


图 A-11　平面组合图形形心轴

矩形Ⅰ：

$$I_y^{\mathrm{I}}=I_{y_{C1}}^{\mathrm{I}}+a_1^2A_1$$
$$=\left(\frac{1}{12}\times 0.059^3\times 0.011+0.0745^2\times 0.011\times 0.059\right)\mathrm{m}^4$$
$$=360.9\mathrm{cm}^4$$

$$I_z^{\mathrm{I}}=I_{z_{C1}}^{\mathrm{I}}+b_1^2A_1$$
$$=\left(\frac{1}{12}\times 0.059\times 0.011^3+(-0.035)^2\times 0.011\times 0.059\right)\mathrm{m}^4$$
$$=98.2\mathrm{cm}^4$$

$$I_{yz}^{\mathrm{I}}=I_{y_{C1}z_{C1}}^{\mathrm{I}}+a_1b_1A_1$$
$$=(0+(-0.035)\times 0.0745\times 0.011\times 0.059)\mathrm{m}^4=-169\mathrm{cm}^4$$

矩形 Ⅱ：

$$I_y^{\mathrm{II}}=I_{y_{C1}}^{\mathrm{II}}=\left(\frac{1}{12}\times 0.011\times 0.16^3\right)\mathrm{m}^4=3769\mathrm{cm}^4$$

$$I_z^{\mathrm{II}}=I_{z_{C1}}^{\mathrm{II}}=\left(\frac{1}{12}\times 0.16\times 0.011^3\right)\mathrm{m}^4=1.78\mathrm{cm}^4$$

$$I_{yz}^{\mathrm{II}}=0$$

矩形Ⅲ：

$$I_y^{\mathrm{III}}=I_y^{\mathrm{I}}=360.9\mathrm{cm}^4$$
$$I_z^{\mathrm{III}}=I_z^{\mathrm{I}}=98.2\mathrm{cm}^4$$
$$I_{yz}^{\mathrm{III}}=I_{yz}^{\mathrm{I}}=-338.4\mathrm{cm}^4$$

整个图形对 y 轴和 z 轴的惯性矩和惯性积为

$$I_y=I_y^{\mathrm{I}}+I_y^{\mathrm{II}}+I_y^{\mathrm{III}}=1097.3\mathrm{cm}^4$$
$$I_z=I_z^{\mathrm{I}}+I_z^{\mathrm{II}}+I_z^{\mathrm{III}}=198\mathrm{cm}^4$$
$$I_{yz}=I_{yz}^{\mathrm{I}}+I_{yz}^{\mathrm{II}}+I_{yz}^{\mathrm{III}}=-338.4\mathrm{cm}^4$$

（2）将求得的 I_y、I_z、I_{yz}代入式（A-18）得

$$\tan 2\alpha_0=\frac{-2I_{yz}}{I_y-I_z}=\frac{-2\times(-338.4)}{1097.3-198}=0.752$$

则

$$\alpha_0=18.5°\text{或 }108.5°$$

α_0 的两个值分别确定了形心主惯性轴 y_0 和 z_0 的位置，则

$$I_{y_0}=\left[\frac{1097.3+198}{2}+\frac{1097.3-198}{2}\cos 37°-(-338.4)\sin 37°\right]\mathrm{cm}^4=1210\mathrm{cm}^4$$

$$I_{z_0}=\left[\frac{1097.3+198}{2}+\frac{1097.3-198}{2}\cos 217°-(-338.4)\sin 217°\right]\mathrm{cm}^4=85\mathrm{cm}^4$$

本章小结

杆件的承载能力，不仅与其材料性能有关，而且还与杆件截面的尺寸、几何形状及放置形式有关。因此，在研究强度，刚度和稳定问题时，都要涉及与截面形状和尺寸有关的一些几何性质，包括形心、静矩、惯性矩、惯性积、极惯性矩、主轴和主惯性矩等。这些几何性质都是对确定的坐标系而言的。静矩和惯性矩都是对于一个坐标轴而言的，而惯性积则是对过一点的一对互相垂直的坐标轴而言的，极惯性矩则是对某一坐标原点而言的。

除了惯性矩与极惯性矩恒为正外，静矩与惯性积都有正、负，也可能为零，其值与图形在坐标系中的位置有关。平面图形对于其形心轴的静矩等于零，反之，平面图形对某轴的静矩为零时，则该轴一定通过图形的形心。

本章所介绍的截面几何性质的定义式列表于下：

静矩	惯性矩	惯性半径	惯性积	极惯性矩
$S_y=\int_A z\mathrm{d}A$	$I_y=\int_A z^2\mathrm{d}A$	$i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}$	$I_{yz}=\int_A yz\mathrm{d}A$	$I_\mathrm{p}=\int_A \rho^2\mathrm{d}A$
$S_z=\int_A y\mathrm{d}A$	$I_z=\int_A y^2\mathrm{d}A$	$i_z=\sqrt{\frac{I_z}{A}}$		

惯性矩和惯性积的平行移轴公式为

$$\begin{cases} I_y=I_{y_C}+a^2A \\ I_z=I_{z_C}+b^2A \\ I_{yz}=I_{y_Cz_C}+abA \end{cases}$$

平行移轴公式的应用条件是两平行轴之一必须是形心轴，应注意 y_C 和 z_C 轴通过截面形心。式中 C 为形心。

如果图形对一对正交坐标轴的惯性积等于零，则这一对坐标轴称为主轴。形心主惯性轴是通过图形形心的主惯性轴。

转轴公式可用于确定主轴位置和求主惯性矩，公式为

$$\begin{cases} I_{y_1}=\frac{1}{2}(I_y+I_z)+\frac{1}{2}(I_y-I_z)\cos2\alpha-I_{yz}\sin2\alpha \\ I_{z_1}=\frac{1}{2}(I_y+I_z)-\frac{1}{2}(I_y-I_z)\cos2\alpha+I_{yz}\sin2\alpha \\ I_{y_1z_1}=\frac{1}{2}(I_y-I_z)\sin2\alpha+I_{yz}\cos2\alpha \end{cases}$$

直角坐标轴 y_1-z_1 与 y-z 夹角为 α，坐标原点均为 O。

任何截面图形必定存在一对形心主轴，它具有下列特性：

(1) 整个截面对形心主轴的静矩为零；

(2) 整个截面对一对形心主轴的惯性积为零；

(3) 在所有与一形心主轴平行的轴中，截面对形心主轴的惯性矩最小；

(4) 在所有通过形心的各轴中，截面对一对形心主轴的惯性矩，必取最大值和最小值。

（5）通过截面形心并包含对称轴的一对轴，必定是形心主轴。

思考题

A-1　图 A-12 所示各截面图形中 C 是形心。试问哪些截面图形对坐标轴的惯性积等于零？

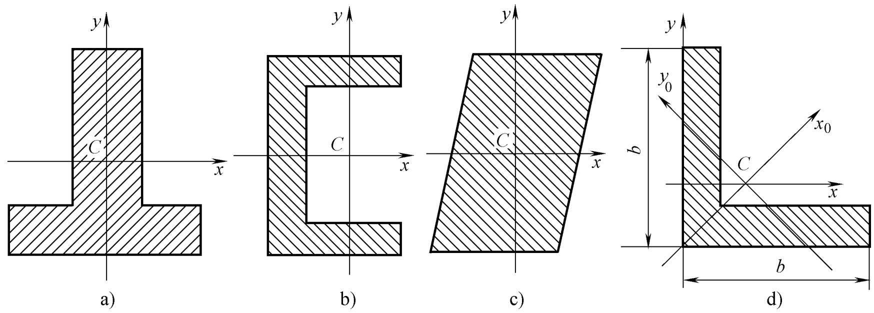


图 A-12　思考题 A-1 图

A-2　以下关于平面图形几何性质的论述是否正确？

（1）图形对某一轴的静矩为零，则该轴必定通过图形的形心。

（2）任何图形内的任一点只有一对主惯性轴。

（3）有一定面积的图形对任一轴的轴惯性矩必不为零。

（4）图形对过某一点的主轴的惯性矩为该图形对过该点所有轴的惯性矩中的极值。

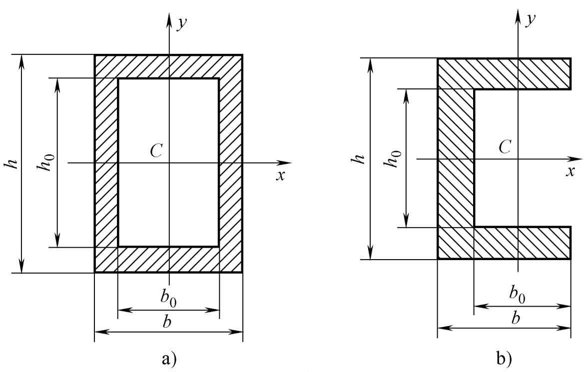


图 A-13　思考题 A-3 图

A-3　图 A-13 所示两截面图形的惯性矩 I_x 和 I_y 是否可以按照 $I_x=\frac{bh^3}{12}-\frac{b_0h_0^3}{12}$ 和 $I_y=\frac{hb^3}{12}-\frac{h_0b_0^3}{12}$来计算？

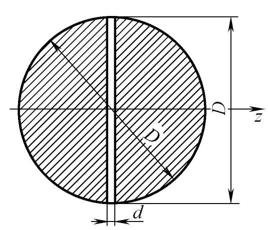


图 A-14　思考题 A-5 图

A-4　以下关于平面图形几何性质的选项，哪个正确？

（1）图形对于其对称轴的______。

A. 静矩为零，惯性矩不为零；　　B. 静矩和惯性矩均为零；

C. 静矩不为零，惯性矩为零；　　D. 静矩和惯性矩均不为零。

（2）直径为 d 的圆形对其形心主轴的惯性半径 $i=$______。

A. $d/2$；　　B. $d/3$；　　C. $d/4$；　　D. $d/8$。

A-5　图 A-14 所示截面图形中阴影部分对形心主轴 z 的惯性矩 $I_z=$______。

A. $\frac{\pi D^4}{32}-\frac{dD^3}{12}$；　　B. $\frac{\pi D^4}{32}-\frac{dD^3}{6}$；　　C. $\frac{\pi D^4}{64}-\frac{dD^3}{12}$；　　D. $\frac{\pi D^4}{64}-\frac{dD^3}{6}$。

习题

A-1　求图 A-15 所示平面图形中阴影部分对 z 轴的静矩。

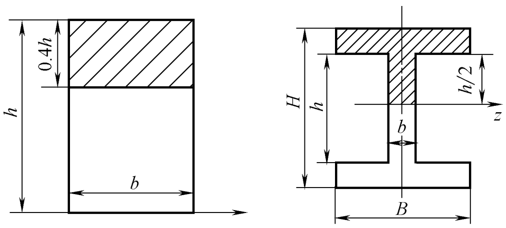


图 A-15　题 A-1 图

A-2　求图 A-16 所示平面图形对 z、y 轴的惯性矩。

A-3　确定图 A-17 所示图形的形心位置，计算平面图形对形心轴 y_C 的惯性矩。

A-4　试求图 A-18 所示平面图形的形心主惯性轴的位置，并求形心主惯性矩。

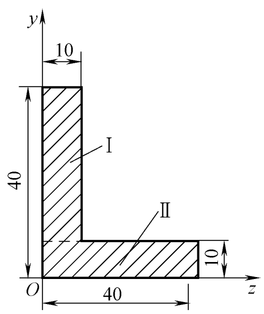


图 A-16　题 A-2 图

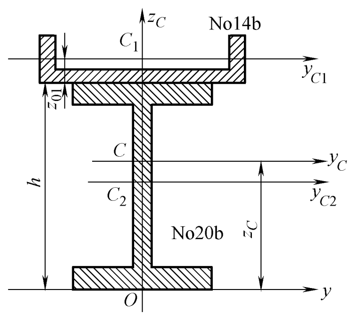


图 A-17　题 A-3 图

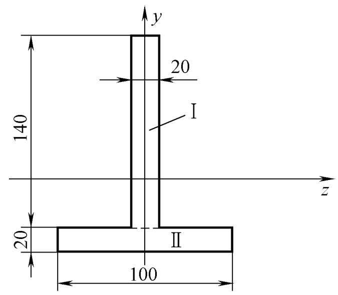


图 A-18　题 A-4 图

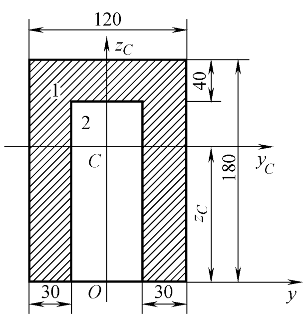


图 A-19　题 A-5 图

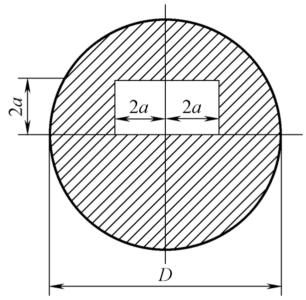


图 A-20　题 A-6 图

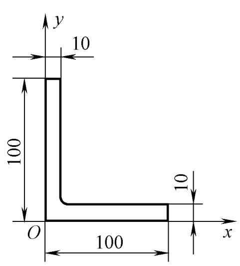


图 A-21　题 A-7 图

A-5　试确定图 A-19 所示槽形图形的形心主惯性轴的位置，并求形心主惯性矩。

A-6　在直径 $D=8a$ 的圆截面中，开了一个 $2a\times4a$ 的矩形孔，如图 A-20 所示。试求此截面对其水平形心轴和竖直形心轴的惯性矩 I_z 和 I_y。

A-7　求图 A-21 所示截面的惯性积 I_{zy}。

A-8　确定图 A-22 所示图形的形心主轴和形心主惯性矩。

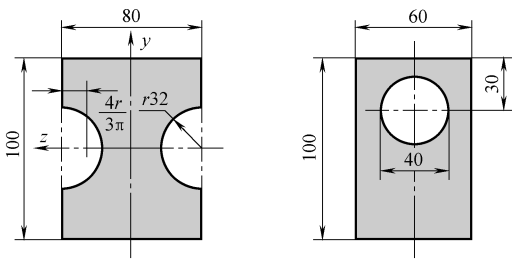
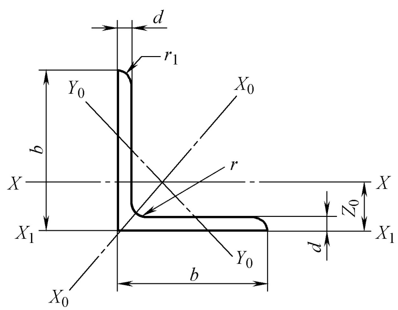


图 A-22　题 A-8 图

附录B　型钢表（GB/T 706—2008）

表 B-1　热轧等边角钢



符号意义：

b——边宽
d——边厚
r——内圆弧半径
r_1——边端内弧半径
I——惯性矩
i——惯性半径
W——截面模数
Z_0——重心距离

型号	截面尺寸/mm			截面面积/cm^2	理论重量/(kg/m)	外表面积/(m^2/m)	惯性矩/cm^4				惯性半径/cm			截面模数/cm^3			重心距离/cm
	b	d	r				I_x	I_{x1}	I_{x0}	I_{y0}	i_x	i_{x0}	i_{y0}	W_x	W_{x0}	W_{y0}	Z_0
2	20	3	3.5	1.132	0.889	0.078	0.40	0.81	0.63	0.17	0.59	0.75	0.39	0.29	0.45	0.20	0.60
		4		1.459	1.145	0.077	0.50	1.09	0.78	0.22	0.58	0.73	0.38	0.36	0.55	0.24	0.64
2.5	25	3		1.432	1.124	0.098	0.82	1.57	1.29	0.34	0.76	0.95	0.49	0.46	0.73	0.33	0.73
		4		1.859	1.459	0.097	1.03	2.11	1.62	0.43	0.74	0.93	0.48	0.59	0.92	0.40	0.76
3.0	30	3	4.5	1.749	1.373	0.117	1.46	2.71	2.31	0.61	0.91	1.15	0.59	0.68	1.09	0.51	0.85
		4		2.276	1.786	0.117	1.84	3.63	2.92	0.77	0.90	1.13	0.58	0.87	1.37	0.62	0.89
3.6	36	3		2.109	1.656	0.141	2.58	4.68	4.09	1.07	1.11	1.39	0.71	0.99	1.61	0.76	1.00
		4		2.756	2.163	0.141	3.29	6.25	5.22	1.37	1.09	1.38	0.70	1.28	2.05	0.93	1.04
		5		3.382	2.654	0.141	3.95	7.84	6.24	1.65	1.08	1.36	0.70	1.56	2.45	1.00	1.07

（续）

型号	截面尺寸/mm			截面面积/cm^2	理论重量/(kg/m)	外表面积/(m^2/m)	惯性矩/cm^4				惯性半径/cm			截面模数/cm^3			重心距离/cm
	b	d	r				I_x	I_{x1}	I_{x0}	I_{y0}	i_x	i_{x0}	i_{y0}	W_x	W_{x0}	W_{y0}	Z_0
4	40	3	5	2.359	1.852	0.157	3.59	6.41	5.69	1.49	1.23	1.55	0.79	1.23	2.01	0.96	1.09
		4		3.086	2.422	0.157	4.60	8.56	7.29	1.91	1.22	1.54	0.79	1.60	2.58	1.19	1.13
		5		3.791	2.976	0.156	5.53	10.74	8.76	2.30	1.21	1.52	0.78	1.96	3.10	1.39	1.17
4.5	45	3		2.659	2.088	0.177	5.17	9.12	8.20	2.14	1.40	1.76	0.89	1.58	2.58	1.24	1.22
		4		3.486	2.736	0.177	6.65	12.18	10.56	2.75	1.38	1.74	0.89	2.05	3.32	1.54	1.26
		5		4.292	3.369	0.176	8.04	15.2	12.74	3.33	1.37	1.72	0.88	2.51	4.00	1.81	1.30
		6		5.076	3.985	0.176	9.33	18.36	14.76	3.89	1.36	1.70	0.8	2.95	4.64	2.06	1.33
5	50	3	5.5	2.971	2.332	0.197	7.18	12.5	11.37	2.98	1.55	1.96	1.00	1.96	3.22	1.57	1.34
		4		3.897	3.059	0.197	9.26	16.69	14.70	3.82	1.54	1.94	0.99	2.56	4.16	1.96	1.38
		5		4.803	3.770	0.196	11.21	20.90	17.79	4.64	1.53	1.92	0.98	3.13	5.03	2.31	1.42
		6		5.688	4.465	0.196	13.05	25.14	20.68	5.42	1.52	1.91	0.98	3.68	5.85	2.63	1.46
5.6	56	3	6	3.343	2.624	0.221	10.19	17.56	16.14	4.24	1.75	2.20	1.13	2.48	4.08	2.02	1.48
		4		4.390	3.446	0.220	13.18	23.43	20.92	5.46	1.73	2.18	1.11	3.24	5.28	2.52	1.53
		5		5.415	4.251	0.220	16.02	29.33	25.42	6.61	1.72	2.17	1.10	3.97	6.42	2.98	1.57
		6		6.420	5.040	0.220	18.69	35.26	29.66	7.73	1.71	2.15	1.10	4.68	7.49	3.40	1.61
		7		7.404	5.812	0.219	21.23	41.23	33.63	8.82	1.69	2.13	1.09	5.36	8.49	3.80	1.64
		8		8.367	6.568	0.219	23.63	47.24	37.37	9.89	1.68	2.11	1.09	6.03	9.44	4.16	1.68
6	60	5	6.5	5.829	4.576	0.236	19.89	36.05	31.57	8.21	1.85	2.33	1.19	4.59	7.44	3.48	1.67
		6		6.914	5.427	0.235	23.25	43.33	36.89	9.60	1.83	2.31	1.18	5.41	8.70	3.98	1.70
		7		7.977	6.262	0.235	26.44	50.65	41.92	10.96	1.82	2.29	1.17	6.21	9.88	4.45	1.74
		8		9.020	7.081	0.235	29.47	58.02	46.66	12.28	1.81	2.27	1.17	6.98	11.00	4.88	1.78

（续）

型号	截面尺寸/mm			截面面积/cm²	理论重量/(kg/m)	外表面积/(m²/m)	惯性矩/cm⁴				惯性半径/cm			截面模数/cm³			重心距离/cm
	b	d	r				I_x	I_{x1}	I_{x0}	I_{y0}	i_x	i_{x0}	i_{y0}	W_x	W_{x0}	W_{y0}	Z_0
6.3	63	4	7	4.978	3.907	0.248	19.03	33.35	30.17	7.89	1.96	2.46	1.26	4.13	6.78	3.29	1.70
		5		6.143	4.822	0.248	23.17	41.73	36.77	9.57	1.94	2.45	1.25	5.08	8.25	3.90	1.74
		6		7.288	5.721	0.247	27.12	50.14	43.03	11.20	1.93	2.43	1.24	6.00	9.66	4.46	1.78
		7		8.412	6.603	0.247	30.87	58.60	48.96	12.79	1.92	2.41	1.23	6.88	10.99	4.98	1.82
		8		9.515	7.469	0.247	34.46	67.11	54.56	14.33	1.90	2.40	1.23	7.75	12.25	5.47	1.85
		10		11.657	9.151	0.246	41.09	84.31	64.85	17.33	1.88	2.36	1.22	9.39	14.56	6.36	1.93
7	70	4	8	5.570	4.372	0.275	26.39	45.74	41.80	10.99	2.18	2.74	1.40	5.14	8.44	4.17	1.86
		5		6.875	5.397	0.275	32.21	57.21	51.08	13.31	2.16	2.73	1.39	6.32	10.32	4.95	1.91
		6		8.160	6.406	0.275	37.77	68.73	59.93	15.61	2.15	2.71	1.38	7.48	12.11	5.67	1.95
		7		9.424	7.398	0.275	43.09	80.29	68.35	17.82	2.14	2.69	1.38	8.59	13.81	6.34	1.99
		8		10.667	8.373	0.274	48.17	91.92	76.37	19.98	2.12	2.68	1.37	9.68	15.43	6.98	2.03
7.5	75	5	9	7.412	5.818	0.295	39.97	70.56	63.30	16.63	2.33	2.92	1.50	7.32	11.94	5.77	2.04
		6		8.797	6.905	0.294	46.95	84.55	74.38	19.51	2.31	2.90	1.49	8.64	14.02	6.67	2.07
		7		10.160	7.976	0.294	53.57	98.71	84.96	22.18	2.30	2.89	1.48	9.93	16.02	7.44	2.11
		8		11.503	9.030	0.294	59.96	112.97	95.07	24.86	2.28	2.88	1.47	11.20	17.93	8.19	2.15
		9		12.825	10.068	0.294	66.10	127.30	104.71	27.48	2.27	2.86	1.46	12.43	19.75	8.89	2.18
		10		14.126	11.089	0.293	71.98	141.71	113.92	30.05	2.26	2.84	1.46	13.64	21.48	9.56	2.22
8	80	5		7.912	6.211	0.315	48.79	85.36	77.33	20.25	2.48	3.13	1.60	8.34	13.67	6.66	2.15
		6		9.397	7.376	0.314	57.35	102.50	90.98	23.72	2.47	3.11	1.59	9.87	16.08	7.65	2.19
		7		10.860	8.525	0.314	65.58	119.70	104.07	27.09	2.46	3.10	1.58	11.37	18.40	8.58	2.23
		8		12.303	9.658	0.314	73.49	136.97	116.60	30.39	2.44	3.08	1.57	12.83	20.61	9.46	2.27
		9		13.725	10.774	0.314	81.11	154.31	128.60	33.61	2.43	3.06	1.56	14.25	22.73	10.29	2.31
		10		15.126	11.874	0.313	88.43	171.74	140.09	36.77	2.42	3.04	1.56	15.64	24.76	11.08	2.35

（续）

型号	截面尺寸/mm			截面面积/cm^2	理论重量/(kg/m)	外表面积/(m^2/m)	惯性矩/cm^4				惯性半径/cm			截面模数/cm^3			重心距离/cm
	b	d	r				I_x	I_{x1}	I_{x0}	I_{y0}	i_x	i_{x0}	i_{y0}	W_x	W_{x0}	W_{y0}	Z_0
9	90	6	10	10.637	8.350	0.354	82.77	145.87	131.26	34.28	2.79	3.51	1.80	12.61	20.63	9.95	2.44
		7		12.301	9.656	0.354	94.83	170.30	150.47	39.18	2.78	3.50	1.78	14.54	23.64	11.19	2.48
		8		13.944	10.946	0.353	106.47	194.80	168.97	43.97	2.76	3.48	1.78	16.42	26.55	12.35	2.52
		9		15.566	12.219	0.353	117.72	219.39	186.77	48.66	2.75	3.46	1.77	18.27	29.35	13.46	2.56
		10		17.167	13.476	0.353	128.58	244.07	203.90	53.26	2.74	3.45	1.76	20.07	32.04	14.52	2.59
		12		20.306	15.940	0.352	149.22	293.76	236.21	62.22	2.71	3.41	1.75	23.57	37.12	16.49	2.67
10	100	6	12	11.932	9.366	0.393	114.95	200.07	181.98	47.92	3.10	3.90	2.00	15.68	25.74	12.69	2.67
		7		13.796	10.830	0.393	131.86	233.54	208.97	54.74	3.09	3.89	1.99	18.10	29.55	14.26	2.71
		8		15.638	12.276	0.393	148.24	267.09	235.07	61.41	3.08	3.88	1.98	20.47	33.24	15.75	2.76
		9		17.462	13.708	0.392	164.12	300.73	260.30	67.95	3.07	3.86	1.97	22.79	36.81	17.18	2.80
		10		19.261	15.120	0.392	179.51	334.48	284.68	74.35	3.05	3.84	1.96	25.06	40.26	18.54	2.84
		12		22.800	17.898	0.391	208.90	402.34	330.95	86.84	3.03	3.81	1.95	29.48	46.80	21.08	2.91
		14		26.256	20.611	0.391	236.53	470.75	374.06	99.00	3.00	3.77	1.94	33.73	52.90	23.44	2.99
		16		29.627	23.257	0.390	262.53	539.80	414.16	110.89	2.98	3.74	1.94	37.82	58.57	25.63	3.06
11	110	7		15.196	11.928	0.433	177.16	310.64	280.94	73.38	3.41	4.30	2.20	22.05	36.12	17.51	2.96
		8		17.238	13.535	0.433	199.46	355.20	316.49	82.42	3.40	4.28	2.19	24.95	40.69	19.39	3.01
		10		21.261	16.690	0.432	242.19	444.65	384.39	99.98	3.38	4.25	2.17	30.68	49.42	22.91	3.09
		12		25.200	19.782	0.431	282.55	534.60	448.17	116.93	3.35	4.22	2.15	36.05	57.62	26.15	3.16
		14		29.056	22.809	0.431	320.71	625.16	508.01	133.40	3.32	4.18	2.14	41.31	65.31	29.14	3.24
12.5	125	8	14	19.750	15.504	0.492	297.03	521.01	470.89	123.16	3.88	4.88	2.50	32.52	53.28	25.86	3.37
		10		24.373	19.133	0.491	361.67	651.93	573.89	149.46	3.85	4.85	2.48	39.97	64.93	30.62	3.45
		12		28.912	22.696	0.491	423.16	783.42	671.44	174.88	3.83	4.82	2.46	41.17	75.96	35.03	3.53
		14		33.367	26.193	0.490	481.65	915.61	763.73	199.57	3.80	4.78	2.45	54.16	86.41	39.13	3.61
		16		37.739	29.625	0.489	537.31	1048.62	850.98	223.65	3.77	4.75	2.43	60.93	96.28	42.96	3.68

（续）

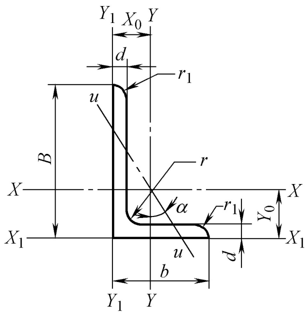
型号	截面尺寸/mm			截面面积/cm²	理论重量/(kg/m)	外表面积/(m²/m)	惯性矩/cm⁴				惯性半径/cm			截面模数/cm³			重心距离/cm
	b	d	r				I_x	I_{x1}	I_{x0}	I_{y0}	i_x	i_{x0}	i_{y0}	W_x	W_{x0}	W_{y0}	Z_0
14	140	10	14	27.373	21.488	0.551	514.65	915.11	817.27	212.04	4.34	5.46	2.78	50.58	82.56	39.20	3.82
		12		32.512	25.522	0.551	603.68	1099.28	958.79	248.57	4.31	5.43	2.76	59.80	96.85	45.02	3.90
		14		37.567	29.490	0.550	688.81	1284.22	1093.56	284.06	4.28	5.40	2.75	68.75	110.47	50.45	3.98
		16		42.539	33.393	0.549	770.24	1470.07	1221.81	318.67	4.26	5.36	2.74	77.46	123.42	55.55	4.06
15	150	8		23.750	18.644	0.592	521.37	899.55	827.49	215.25	4.69	5.90	3.01	47.36	78.02	38.14	3.99
		10		29.373	23.058	0.591	637.50	1125.09	1012.79	262.21	4.66	5.87	2.99	58.35	95.49	45.51	4.08
		12		34.912	27.406	0.591	748.85	1351.26	1189.97	307.73	4.63	5.84	2.97	69.04	112.19	52.38	4.15
		14		40.367	31.688	0.590	855.64	1578.25	1359.30	351.98	4.60	5.80	2.95	79.45	128.16	58.83	4.23
		15		43.063	33.804	0.590	907.39	1692.10	1441.09	373.69	4.59	5.78	2.95	84.56	135.87	61.90	4.27
		16		45.739	35.905	0.589	958.08	1806.21	1521.02	395.14	4.58	5.77	2.94	89.59	143.40	64.89	4.31
16	160	10	16	31.502	24.729	0.630	779.53	1365.33	1237.30	321.76	4.98	6.27	3.20	66.70	109.36	52.76	4.31
		12		37.441	29.391	0.630	916.58	1639.57	1455.68	377.49	4.95	6.24	3.18	78.98	128.67	60.74	4.39
		14		43.296	33.987	0.629	1048.36	1914.68	1665.02	431.70	4.92	6.20	3.16	90.95	147.17	68.24	4.47
		16		49.067	38.518	0.629	1175.08	2190.82	1865.57	484.59	4.89	6.17	3.14	102.63	164.89	75.31	4.55
18	180	12		42.241	33.159	0.710	1321.35	2332.80	2100.10	542.61	5.59	7.05	3.58	100.82	165.00	78.41	4.89
		14		48.896	38.383	0.709	1514.48	2723.48	2407.42	621.53	5.56	7.02	3.56	116.25	189.14	88.38	4.97
		16		55.467	43.542	0.709	1700.99	3115.29	2703.37	698.60	5.54	6.98	3.55	131.13	212.40	97.83	5.05
		18		61.055	48.634	0.708	1875.12	3502.43	2988.24	762.01	5.50	6.94	3.51	145.64	234.78	105.14	5.13

（续）

型号	截面尺寸/mm			截面面积/cm^2	理论重量/(kg/m)	外表面积/(m^2/m)	惯性矩/cm^4				惯性半径/cm			截面模数/cm^3			重心距离/cm
	b	d	r				I_x	I_{x1}	I_{x0}	I_{y0}	i_x	i_{x0}	i_{y0}	W_x	W_{x0}	W_{y0}	Z_0
20	200	14	18	54.642	42.894	0.788	2103.55	3734.10	3343.26	863.83	6.20	7.82	3.98	144.70	236.40	111.82	5.46
		16		62.013	48.680	0.788	2366.15	4270.39	3760.89	971.41	6.18	7.79	3.96	163.65	265.93	123.96	5.54
		18		69.301	54.401	0.787	2620.64	4808.13	4164.54	1076.74	6.15	7.75	3.94	182.22	294.48	135.52	5.62
		20		76.505	60.056	0.787	2867.30	5347.51	4554.55	1180.04	6.12	7.72	3.93	200.42	322.06	146.55	5.69
		24		90.661	71.168	0.785	3338.25	6457.16	5294.97	1381.53	6.07	7.64	3.90	236.17	374.41	166.65	5.87
22	220	16	21	68.664	53.901	0.866	3187.36	5681.62	5063.73	1310.99	6.81	8.59	4.37	199.55	325.51	153.81	6.03
		18		76.752	60.250	0.866	3534.30	6395.93	5615.32	1453.27	6.79	8.55	4.35	222.37	360.97	168.29	6.11
		20		84.756	66.533	0.865	3871.49	7112.04	6150.08	1592.90	6.76	8.52	4.34	244.77	395.34	182.16	6.18
		22		92.676	72.751	0.865	4199.23	7830.19	6668.37	1730.10	6.78	8.48	4.32	266.78	428.66	195.45	6.26
		24		100.512	78.902	0.864	4517.83	8550.57	7170.55	1865.11	6.70	8.45	4.31	288.39	460.94	208.21	6.33
		26		108.264	84.987	0.864	4827.58	9273.39	7656.98	1998.17	6.68	8.41	4.30	309.62	492.21	220.49	6.41
25	250	18	24	87.842	68.956	0.985	5268.22	9379.11	8369.04	2167.41	7.74	9.76	4.97	290.12	473.42	224.03	6.84
		20		97.045	76.180	0.984	5779.34	10426.97	9181.94	2376.74	7.72	9.73	4.95	319.66	519.41	242.85	6.92
		24		115.201	90.433	0.983	6763.93	12529.74	10742.67	2785.19	7.66	9.66	4.92	377.34	607.70	278.38	7.07
		26		124.154	97.461	0.982	7238.08	13585.18	11491.33	2984.84	7.63	9.62	4.90	405.50	650.05	295.19	7.15
		28		133.022	104.422	0.982	7709.60	14643.62	12219.39	3181.81	7.61	9.58	4.89	433.22	691.23	311.42	7.22
		30		141.807	111.318	0.981	8151.80	15705.30	12927.26	3376.34	7.58	9.55	4.88	460.51	731.28	327.12	7.30
		32		150.508	118.149	0.981	8592.01	16770.41	13615.32	3568.71	7.56	9.51	4.87	487.39	770.20	342.33	7.37
		35		163.402	128.271	0.980	9232.44	18374.95	14611.16	3853.72	7.52	9.46	4.86	526.97	826.53	364.30	7.48

注：截面图中的 $r_1 = 1/3d$ 及表中 r 的数据用于孔型设计，不做交货条件。

表 B-2　热轧不等边角钢



符号意义：

B——长边宽度　　b——短边宽度

d——边厚　　r——内圆弧半径

r_1——边端内弧半径　　I——惯性矩

i——惯性半径　　W——截面模数

X_0——重心距离　　Y_0——重心距离

型号	截面尺寸/mm				截面面积/cm^2	理论重量/(kg/m)	外表面积/(m^2/m)	惯性矩/cm^4					惯性半径/cm			截面模数/cm^3			tanα	重心距离/cm	
	B	b	d	r				I_x	I_{x1}	I_y	I_{y1}	I_u	i_x	i_y	i_u	W_x	W_y	W_u		X_0	Y_0
2.5/1.6	25	16	3	3.5	1.162	0.912	0.080	0.70	1.56	0.22	0.43	0.14	0.78	0.44	0.34	0.43	0.19	0.16	0.392	0.42	0.86
			4		1.499	1.176	0.079	0.88	2.09	0.27	0.59	0.17	0.77	0.43	0.34	0.55	0.24	0.20	0.381	0.46	1.86
3.2/2	32	20	3		1.492	1.171	0.102	1.53	3.27	0.46	0.82	0.28	1.01	0.55	0.43	0.72	0.30	0.25	0.382	0.49	0.90
			4		1.939	1.522	0.101	1.93	4.37	0.57	1.12	0.35	1.00	0.54	0.42	0.93	0.39	0.32	0.374	0.53	1.08
4/2.5	40	25	3	4	1.890	1.484	0.127	3.08	5.39	0.93	1.59	0.56	1.28	0.70	0.54	1.15	0.49	0.40	0.385	0.59	1.12
			4		2.467	1.936	0.127	3.93	8.53	1.18	2.14	0.71	1.36	0.69	0.54	1.49	0.63	0.52	0.381	0.63	1.32
4.5/2.8	45	28	3	5	2.149	1.687	0.143	445	9.10	1.34	2.23	0.80	1.44	0.79	0.61	1.47	0.62	0.51	0.383	0.64	1.37
			4		2.806	2.203	0.143	5.69	12.13	1.70	3.00	1.02	1.42	0.78	0.60	1.91	0.80	0.66	0.380	0.68	1.47
5/3.2	50	32	3	5.5	2.431	1.908	0.161	6.24	12.49	2.02	3.31	1.20	1.60	0.91	0.70	1.84	0.82	0.68	0.404	0.73	1.51
			4		3.177	2.494	0.160	8.02	16.65	2.58	4.45	1.53	1.59	0.90	0.69	2.39	1.06	0.87	0.402	0.77	1.60
5.6/3.6	56	36	3	6	2.743	2.153	0.181	8.88	17.54	2.92	4.70	1.73	1.80	1.03	0.79	2.32	1.05	0.87	0.408	0.80	1.65
			4		3.590	2.818	0.180	11.45	23.39	3.76	6.33	2.23	1.79	1.02	0.79	3.03	1.37	1.13	0.408	0.85	1.78
			5		4.415	3.466	0.180	13.86	29.25	4.49	7.94	2.67	1.77	1.01	0.78	3.71	1.65	1.36	0.404	0.88	1.82

（续）

型号	截面尺寸/mm				截面面积/cm^2	理论重量/(kg/m)	外表面积/(m^2/m)	惯性矩/cm^4					惯性半径/cm			截面模数/cm^3			tanα	重心距离/cm	
	B	b	d	r				I_x	I_{x1}	I_y	I_{y1}	I_u	i_x	i_y	i_u	W_x	W_y	W_u		X_0	Y_0
6.3/4	63	40	4	7	4.058	3.185	0.202	16.49	33.30	5.23	8.63	3.12	2.20	1.14	0.88	3.87	1.70	1.40	0.398	0.92	1.87
			5		4.993	3.920	0.202	20.02	41.63	6.31	10.86	3.76	2.00	1.12	0.87	4.74	2.07	1.71	0.396	0.95	2.04
			6		5.908	4.638	0.201	23.36	49.98	7.29	13.12	4.34	1.96	1.11	0.86	5.59	2.43	1.99	0.393	0.99	2.08
			7		6.802	5.339	0.201	26.53	58.07	8.24	15.47	4.97	1.98	1.10	0.86	6.40	2.78	2.29	0.389	1.03	2.12
7/4.5	70	45	4	7.5	4.547	3.570	0.226	23.17	45.92	7.55	12.26	4.40	2.26	1.29	0.98	4.86	2.17	1.77	0.410	1.02	2.15
			5		5.609	4.403	0.225	27.95	57.10	9.13	15.39	5.40	2.23	1.28	0.98	5.92	2.65	2.19	0.407	1.06	2.24
			6		6.647	5.218	0.225	32.54	68.35	10.62	18.58	6.35	2.21	1.26	0.98	6.95	3.12	2.59	0.404	1.09	2.28
			7		7.657	6.011	0.225	37.22	79.99	12.01	21.84	7.16	2.20	1.25	0.97	8.03	3.57	2.94	0.402	1.13	2.32
7.5/5	75	50	5	8	6.125	4.808	0.245	34.86	70.00	12.61	21.04	7.41	2.39	1.44	1.10	6.83	3.30	2.74	0.435	1.17	2.36
			6		7.260	5.699	0.245	41.12	84.30	14.70	25.87	8.54	2.38	1.42	1.08	8.12	3.88	3.19	0.435	1.21	2.40
			8		9.467	7.431	0.244	52.39	112.50	18.53	34.23	10.87	2.35	1.40	1.07	10.52	4.99	4.10	0.429	1.29	2.44
			10		11.590	9.098	0.244	62.71	140.80	21.96	43.43	13.10	2.33	1.38	1.06	12.79	6.04	4.99	0.423	1.36	2.52
8/5	80	50	5		6.375	5.005	0.255	41.96	85.21	12.82	21.06	7.66	2.56	1.42	1.10	7.78	3.32	2.74	0.388	1.14	2.60
			6		7.560	5.935	0.255	49.49	102.53	14.95	25.41	8.85	2.56	1.41	1.08	9.25	3.91	3.20	0.387	1.18	2.65
			7		8.724	6.848	0.255	56.46	119.33	46.96	29.82	10.18	2.54	1.39	1.08	10.58	4.48	3.70	0.384	1.21	2.69
			8		9.867	7.745	0.254	62.83	136.41	18.85	34.32	11.38	2.52	1.38	1.07	11.92	5.03	4.16	0.381	1.25	2.73
9/5.6	90	56	5	9	7.212	5.661	0.287	60.45	121.32	18.32	29.53	10.98	2.90	1.59	1.23	9.92	4.21	3.49	0.385	1.25	2.91
			6		8.557	6.717	0.286	71.03	145.59	21.42	35.58	12.90	2.88	1.58	1.23	11.74	4.96	4.13	0.384	1.29	2.95
			7		9.880	7.756	0.286	81.01	169.60	24.36	41.71	14.67	2.86	1.57	1.22	13.49	5.70	4.72	0.382	1.33	3.00
			8		11.183	8.779	0.286	91.03	194.14	27.15	47.98	16.34	2.85	1.56	1.21	15.27	6.41	5.29	0.380	1.36	3.04

（续）

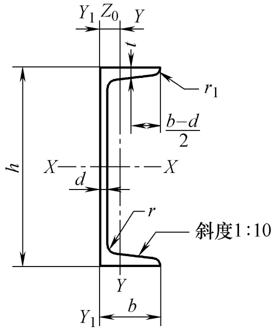
型号	截面尺寸/mm				截面面积/cm^2	理论重量/(kg/m)	外表面积/(m^2/m)	惯性矩/cm^4					惯性半径/cm			截面模数/cm^3			tanα	重心距离/cm	
	B	b	d	r				I_x	I_{x1}	I_y	I_{y1}	I_u	i_x	i_y	i_u	W_x	W_y	W_u		X_0	Y_0
10/6.3	100	63	6	10	9.617	7.550	0.320	99.06	199.71	30.94	50.50	18.42	3.21	1.79	1.38	14.64	6.35	5.25	0.394	1.43	3.24
			7		11.111	8.722	0.320	113.45	233.00	35.26	59.14	21.00	3.20	1.78	1.38	16.88	7.29	6.02	0.394	1.47	3.28
			8		12.534	9.878	0.319	127.37	266.32	39.39	67.88	23.50	3.18	1.77	1.37	19.08	8.21	6.78	0.391	1.50	3.32
			10		15.467	12.142	0.319	153.81	333.06	47.12	85.73	28.33	3.15	1.74	1.35	23.32	9.98	8.24	0.387	1.58	3.40
10/8	100	80	6		10.637	8.350	0.354	107.04	199.83	61.24	102.68	31.65	3.17	2.40	1.72	15.19	10.16	8.37	0.627	1.97	2.95
			7		12.301	9.656	0.354	122.73	233.20	70.08	119.98	36.17	3.16	2.39	1.72	17.52	11.71	9.60	0.626	2.01	3.0
			8		13.944	10.946	0.353	137.92	266.61	78.58	137.37	40.58	3.14	2.37	1.71	19.81	13.21	10.80	0.625	2.05	3.04
			10		17.167	13.476	0.353	166.87	333.63	94.65	172.48	49.10	3.12	2.35	1.69	24.24	16.12	13.12	0.622	2.13	3.12
11/7	110	70	6	10	10.637	8.350	0.354	133.37	265.78	42.92	69.08	25.36	3.54	2.01	1.54	17.85	7.90	6.53	0.403	1.57	3.53
			7		12.301	9.656	0.354	153.00	310.07	49.01	80.82	28.95	3.53	2.00	1.53	20.60	9.09	7.50	0.402	1.61	3.57
			8		13.944	10.946	0.353	172.04	354.39	54.87	92.70	32.45	3.51	1.98	1.53	23.30	10.25	8.45	0.401	1.65	3.62
			10		17.167	13.476	0.353	208.39	443.13	65.88	116.83	39.20	3.48	1.96	1.51	28.54	12.48	10.29	0.397	1.72	3.70
12.5/8	125	80	7	11	14.096	11.066	0.403	227.98	454.99	74.42	120.32	43.81	4.02	2.30	1.76	26.86	12.01	9.92	0.408	1.80	4.01
			8		15.989	12.551	0.403	256.77	519.99	83.49	137.85	49.15	4.01	2.28	1.75	30.41	13.56	11.18	0.407	1.84	4.06
			10		19.712	15.474	0.402	312.04	650.09	100.67	173.40	59.45	3.98	2.26	1.47	37.33	16.56	13.64	0.404	1.92	4.14
			12		23.351	18.330	0.402	364.41	780.39	116.67	209.67	69.35	3.95	2.24	1.72	44.01	19.43	16.01	0.400	2.00	4.22
14/9	140	90	8	12	18.038	14.160	0.453	365.64	730.53	120.69	195.79	70.83	4.50	2.59	1.98	38.48	17.34	14.31	0.411	2.04	4.50
			10		22.261	17.475	0.452	445.50	913.20	140.03	245.92	85.82	4.47	2.56	1.96	47.31	21.22	17.48	0.409	2.12	4.58
			12		26.400	20.724	0.451	521.59	1096.09	169.79	296.89	100.21	4.44	2.54	1.95	55.87	24.95	20.54	0.406	2.19	4.66
			14		30.456	23.908	0.451	594.10	1279.26	192.10	348.82	114.13	4.42	2.51	1.94	64.18	28.54	23.52	0.403	2.27	4.74

（续）

型号	截面尺寸/mm				截面面积/cm²	理论重量/(kg/m)	外表面积/(m²/m)	惯性矩/cm⁴					惯性半径/cm			截面模数/cm³			tanα	重心距离/cm	
	B	b	d	r				I_x	I_{x1}	I_y	I_{y1}	I_u	i_x	i_y	i_u	W_x	W_y	W_u		X_0	Y_0
15/9	150	90	8	12	18.839	14.788	0.473	442.05	898.35	122.80	195.96	74.14	4.84	2.55	1.98	43.86	17.47	14.48	0.364	1.97	4.92
			10		23.261	18.260	0.472	539.24	1122.85	148.62	246.26	89.86	4.81	2.53	1.97	53.97	21.38	17.69	0.362	2.05	5.01
			12		27.600	21.666	0.471	632.08	1347.50	172.85	297.46	104.95	4.79	2.50	1.95	63.79	25.14	20.80	0.359	2.12	5.09
			14		31.856	25.007	0.471	720.77	1572.38	195.62	349.74	119.53	4.76	2.48	1.94	73.33	28.77	23.84	0.356	2.20	5.17
			15		33.952	26.652	0.471	763.62	1684.93	206.50	376.33	126.67	4.74	2.47	1.93	77.99	30.53	25.33	0.354	2.24	5.21
			16		36.027	28.281	0.470	805.51	1797.55	217.07	403.24	133.72	4.73	2.45	1.93	82.60	32.27	26.82	0.352	2.27	5.25
16/10	160	100	10	13	23.315	19.872	0.512	668.69	1362.89	205.03	336.59	121.74	5.14	2.85	2.19	62.13	26.56	21.92	0.390	2.28	5.24
			12		30.054	23.592	0.511	784.91	1635.56	239.06	405.94	142.33	5.11	2.82	2.17	73.49	31.28	25.79	0.388	2.36	5.32
			14		34.709	27.247	0.510	896.30	1908.50	271.20	476.42	162.23	5.08	2.80	2.16	84.56	35.83	29.56	0.385	0.43	5.40
			16		29.281	30.835	0.510	1003.04	2181.79	301.60	548.22	182.57	5.05	2.77	2.16	95.33	40.24	33.44	0.382	2.51	5.48
18/11	180	110	10	14	28.373	22.273	0.571	956.25	1940.40	278.11	447.22	166.50	5.80	3.13	2.42	78.96	32.49	26.88	0.376	2.44	5.89
			12		33.712	26.440	0.571	1124.72	2328.38	325.03	538.94	194.87	5.78	3.10	2.40	93.53	38.32	31.66	0.374	2.52	5.98
			14		38.967	30.589	0.570	1286.91	2716.60	369.55	631.95	222.30	5.75	3.08	2.39	107.76	43.97	36.32	0.372	2.59	6.06
			16		44.139	34.649	0.569	1443.06	3105.15	411.85	726.46	248.94	5.72	3.06	2.38	121.64	49.44	40.87	0.369	2.67	6.14
20/12.5	200	125	12		37.912	29.761	0.641	1570.90	3193.85	483.16	787.74	285.79	6.44	3.57	2.74	116.73	49.99	41.23	0.392	2.83	6.54
			14		43.687	34.436	0.640	1800.97	3726.17	550.83	922.47	326.58	6.41	3.54	2.73	134.65	57.44	47.34	0.390	2.91	6.62
			16		49.739	39.045	0.639	2023.35	4258.88	615.44	1058.86	366.21	6.38	3.52	2.71	152.18	64.89	53.32	0.388	2.99	6.70
			18		55.526	43.588	0.639	2238.30	4792.00	677.19	1197.13	404.83	6.35	3.49	2.70	169.33	71.74	59.18	0.385	3.06	6.78

注：截面图中的 $r_1=1/3d$ 及表中 r 的数据用于孔型设计，不做交货条件。

表 B-3　热轧普通槽钢



符号意义：

- h——高度
- b——腿宽
- d——腰厚
- t——平均腿厚
- r——内圆弧半径
- r_1——腿端圆弧半径
- I——惯性矩
- W——截面模数
- Z_0——Y-Y 与 Y_1-Y_1 轴线间距离

型号	截面尺寸 /mm						截面面积 /cm^2	理论重量 /(kg/m)	惯性矩 /cm^4			惯性半径 /cm		截面模数 /cm^3		重心距离 /cm
	h	b	d	t	r	r_1			I_x	I_y	I_{y1}	i_x	i_y	W_x	W_y	Z_0
5	50	37	4.5	7.0	7.0	3.5	6.928	5.438	26.0	8.30	20.9	1.94	1.10	10.4	3.55	1.35
6.3	63	40	4.8	7.5	7.5	3.8	8.451	6.634	50.8	11.9	28.4	2.45	1.19	16.1	4.50	1.36
6.5	65	40	4.3	7.5	7.5	3.8	8.547	6.709	55.2	12.0	28.3	2.54	1.19	17.0	4.59	1.38
8	80	43	5.0	8.0	8.0	4.0	10.248	8.045	101	16.6	37.4	3.15	1.27	25.3	5.79	1.43
10	100	48	5.3	8.5	8.5	4.2	12.748	10.007	198	25.6	54.9	3.95	1.41	39.7	7.80	1.52
12	120	53	5.5	9.0	9.0	4.5	15.362	12.059	346	37.4	77.7	4.75	1.56	57.7	10.2	1.62
12.6	126	53	5.5	9.0	9.0	4.5	15.692	12.318	391	38.0	77.1	4.95	1.57	62.1	10.2	1.59
14a	140	58	6.0	9.5	9.5	4.8	18.516	14.535	564	53.2	107	5.52	1.70	80.5	13.0	1.71
14b		60	8.0				21.316	16.733	609	61.1	121	5.35	1.69	87.1	14.1	1.67
16a	160	63	6.5	10.0	10.0	5.0	21.962	17.24	866	73.3	144	6.28	1.83	108	16.3	1.80
16b		65	8.5				25.162	19.752	935	83.4	161	6.10	1.82	117	17.6	1.75
18a	180	68	7.0	10.5	10.5	5.2	25.699	20.174	1270	98.6	190	7.04	1.96	141	20.0	1.88
18b		70	9.0				29.299	23.000	1370	111	210	6.84	1.95	152	21.5	1.84

（续）

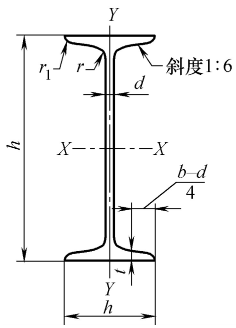
型号	截面尺寸 /mm						截面面积 /cm^2	理论重量 /(kg/m)	惯性矩 /cm^4			惯性半径 /cm		截面模数 /cm^3		重心距离 /cm
	h	b	d	t	r	r_1			I_x	I_y	I_{y1}	i_x	i_y	W_x	W_y	Z_0
20a	200	73	7.0	11.0	11.0	5.5	28.837	22.637	1780	128	244	7.86	2.11	178	24.2	2.01
20b		75	9.0				32.837	25.777	1910	144	268	7.64	2.09	191	25.9	1.95
22a	220	77	7.0	11.5	11.5	5.8	31.846	24.999	2390	158	298	8.67	2.23	218	28.2	2.10
22b		79	9.0				36.246	28.453	2570	176	326	8.42	2.21	234	30.1	2.03
24a	240	78	7.0	12.0	12.0	6.0	34.217	26.860	3050	174	325	9.45	2.25	254	30.5	2.10
24b		80	9.0				39.017	30.628	3280	194	355	9.17	2.23	274	32.5	2.03
24c		82	11.0				43.817	34.396	3510	213	388	8.96	2.21	293	34.4	2.00
25a	250	78	7.0				34.917	27.410	3370	176	322	9.82	2.24	270	30.6	2.07
25b		80	9.0				39.917	31.335	3530	196	353	9.41	2.22	282	32.7	1.98
25c		82	11.0				44.917	35.260	3690	218	384	9.07	2.21	295	35.9	1.92
27a	270	82	7.5	12.5	12.5	6.2	39.284	30.838	4360	216	393	10.5	2.34	323	35.5	2.13
27b		84	9.5				44.684	35.077	4690	239	428	10.3	2.31	347	37.7	2.06
27c		86	11.5				50.084	39.316	5020	261	467	10.1	2.28	372	39.8	2.03
28a	280	82	7.5				40.034	31.427	4760	218	388	10.9	2.33	340	35.7	2.10
28b		84	9.5				45.634	35.823	5130	242	428	10.6	2.30	366	37.9	2.02
28c		86	11.5				51.234	40.219	5500	268	463	10.4	2.29	393	40.3	1.95
30a	300	85	7.5	13.5	13.5	6.8	43.902	34.463	6050	260	467	11.7	2.43	403	41.1	2.17
30b		87	9.5				49.902	39.173	6500	289	515	11.4	2.41	433	44.0	2.13
30c		89	11.5				55.902	43.883	6950	316	560	11.2	2.38	463	46.4	2.09
32a	320	88	8.0	14.0	14.0	7.0	48.513	38.083	7600	305	552	12.5	2.50	475	46.5	2.24
32b		90	10.0				54.913	43.107	8140	336	593	12.2	2.47	509	49.2	2.16
32c		92	12.0				61.313	48.131	8690	374	643	11.9	2.47	543	52.6	2.09

（续）

型号	截面尺寸/mm						截面面积/cm^2	理论重量/(kg/m)	惯性矩/cm^4			惯性半径/cm		截面模数/cm^3		重心距离/cm
	h	b	d	t	r	r_1			I_x	I_y	I_{y1}	i_x	i_y	W_x	W_y	Z_0
36a	360	96	9.0	16.0	16.0	8.0	60.910	47.814	11900	455	818	14.0	2.73	660	63.5	2.44
36b		98	11.0				68.110	53.466	12700	497	880	13.6	2.70	703	66.9	2.37
36c		100	13.0				75.310	59.118	13400	536	948	13.4	2.67	746	70.0	2.34
40a	400	100	10.5	18.0	18.0	9.0	75.068	58.928	17600	592	1070	15.3	2.81	879	78.8	2.49
40b		102	12.5				83.068	65.208	18600	640	114	15.0	2.78	932	82.5	2.44
40c		104	14.5				91.068	71.488	19700	688	1220	14.7	2.75	986	86.2	2.42

注：表中 r、r_1 的数据用于孔型设计，不做交货条件。

表 B-4 热轧普通工字钢



符号意义：
h——高度
b——腿宽
d——腰厚
t——平均腿厚
r——内圆弧半径
r_1——腿端圆弧半径
I——惯性矩
W——截面模数
i——惯性半径

型号	截面尺寸/mm						截面面积/cm^2	理论重量/(kg/m)	惯性矩/cm^4		惯性半径/cm		截面模数/cm^3	
	h	b	d	t	r	r_1			I_x	I_y	i_x	i_y	W_x	W_y
10	100	68	4.5	7.6	6.5	3.3	14.345	11.261	245	33.0	4.14	1.52	49.0	9.72
12	120	74	5.0	8.4	7.0	3.5	17.818	13.987	436	46.9	4.95	1.62	72.7	12.7
12.6	126	74	5.0	8.4	7.0	3.5	18.118	14.223	488	46.9	5.20	1.61	77.5	12.7
14	140	80	5.5	9.1	7.5	3.8	21.516	16.890	712	64.4	5.76	1.73	102	16.1

（续）

型号	截面尺寸/mm						截面面积/cm^2	理论重量/(kg/m)	惯性矩/cm^4		惯性半径/cm		截面模数/cm^3	
	h	b	d	t	r	r_1			I_x	I_y	i_x	i_y	W_x	W_y
16	160	88	6.0	9.9	8.0	4.0	26.131	20.513	1130	93.1	6.58	1.89	141	21.2
18	180	94	6.5	10.7	8.5	4.3	30.756	24.143	1660	122	7.36	2.00	185	26.0
20a	200	100	7.0	11.4	9.0	4.5	35.578	27.929	2370	158	8.15	2.12	237	31.5
20b		102	9.0				39.578	31.069	2500	169	7.96	2.06	250	33.1
22a	220	110	7.5	12.3	9.5	4.8	42.128	33.070	3400	225	8.99	2.31	309	40.9
22b		112	9.5				46.528	36.524	3570	239	8.78	2.27	325	42.7
24a	240	116	8.0	13.0	10.0	5.0	47.741	37.477	4570	280	9.77	2.42	381	48.4
24b		118	10.0				52.541	41.245	4800	297	9.57	2.38	400	50.4
25a	250	116	8.0				48.541	38.105	5020	280	10.2	2.40	402	48.3
25b		118	10.0				53.541	42.030	5280	309	9.94	2.40	423	52.4
27a	270	122	8.5	13.7	10.5	5.3	54.554	42.825	6550	345	10.9	2.51	485	56.6
27b		124	10.5				59.954	47.064	6870	366	10.7	2.47	509	58.9
28a	280	122	8.5				55.404	43.492	7110	345	11.3	2.50	508	56.6
28b		124	10.5				61.004	47.888	7480	379	11.1	2.49	534	61.2
30a	300	126	9.0	14.4	11.0	5.5	61.254	48.084	8950	400	12.1	2.55	597	63.5
30b		128	11.0				67.254	52.794	9400	422	11.8	2.50	627	65.9
30c		130	13.0				73.254	57.504	9850	445	11.6	2.46	657	68.5
32a	320	130	9.5	15.0	11.5	5.8	67.156	52.717	11100	460	12.8	2.62	692	70.8
32b		132	11.5				73.556	57.741	11600	502	12.6	2.61	726	76.0
32c		134	13.5				79.956	62.765	12200	544	12.3	2.61	760	81.2
36a	360	136	10.0	15.8	12.0	6.0	76.480	60.037	15800	552	14.4	2.69	875	81.2
36b		138	12.0				83.680	65.689	16500	582	14.1	2.64	919	84.3
36c		140	14.0				90.880	71.341	17300	612	13.8	2.60	962	87.4

（续）

型号	截面尺寸/mm						截面面积/cm^2	理论重量/(kg/m)	惯性矩/cm^4		惯性半径/cm		截面模数/cm^3	
	h	b	d	t	r	r_1			I_x	I_y	i_x	i_y	W_x	W_y
40a	400	142	10.5	16.5	12.5	6.3	86.112	67.598	21700	660	15.9	2.77	1090	93.2
40b		144	12.5				94.112	73.878	22800	692	15.6	2.71	1140	96.2
40c		146	14.5				102.112	80.158	23900	727	15.2	2.65	1190	99.6
45a	450	150	11.5	18.0	13.5	6.8	102.446	80.420	32200	855	17.7	2.89	1430	114
45b		152	13.5				111.446	87.485	33800	894	17.4	2.84	1500	118
45c		154	15.5				120.446	94.550	35300	938	17.1	2.79	1570	122
50a	500	158	12.0	20.0	14.0	7.0	119.304	93.654	46500	1120	19.7	3.07	1860	142
50b		160	14.0				129.304	101.504	48600	1170	19.4	3.01	1940	146
50c		162	16.0				139.304	109.354	50600	1220	19.0	2.96	2080	151
55a	550	166	12.5	21.0	14.5	7.3	134.185	105.335	62900	1370	21.6	3.19	2290	164
55b		168	14.5				145.185	113.970	65600	1420	21.2	3.14	2390	170
55c		170	16.5				156.185	122.605	68400	1480	20.9	3.08	2490	175
56a	560	166	12.5				135.435	106.316	65600	1370	22.0	3.18	2340	165
56b		168	14.5				146.635	115.108	68500	1490	21.6	3.16	2450	174
56c		170	16.5				157.835	123.900	71400	1560	21.3	3.16	2550	183
63a	630	176	13.0	22.0	15.0	7.5	154.658	121.407	93900	1700	24.5	3.31	2980	193
63b		178	15.0				167.258	131.298	98100	1810	24.2	3.29	3160	204
63c		180	17.0				179.858	141.189	102000	1920	23.8	3.27	3300	214

注：表中 r、r_1 的数据用于孔型设计，不做交货条件。

参 考 文 献

[1] 刘鸿文. 材料力学Ⅰ [M]. 5版. 北京：高等教育出版社，2010.
[2] 刘鸿文. 材料力学Ⅱ [M]. 5版. 北京：高等教育出版社，2010.
[3] 单辉祖，材料力学Ⅰ [M]. 北京：高等教育出版社，1999.
[4] 单辉祖，材料力学Ⅱ [M]. 北京：高等教育出版社，1999.
[5] 金保森，等. 材料力学实验 [M]. 北京：机械工业出版社，2003.
[6] 孙训方. 材料力学Ⅰ [M]. 4版：北京：高等教育出版社，2002.
[7] 孙训方. 材料力学Ⅱ [M]. 4版：北京：高等教育出版社，2002.
[8] 张少实. 新编材料力学 [M]. 北京：机械工业出版社，2002.
[9] 刘淑珍，等. 材料力学学习指导 [M]. 北京：机械工业出版社，2014.
[10] 苏翼林. 材料力学 [M]，天津：天津大学出版社，2001.
[11] 武际可. 力学史 [M]. 重庆：重庆出版社，2000.
[12] 邱棣华，等. 材料力学学习指导书 [M]. 北京：高等教育出版社，2004.
[13] 老亮，等. 材料力学思考题集 [M]. 北京：高等教育出版社，2004.
[14] J M 盖尔. 材料力学（英文版·原书第5版影印版）[M]. 北京：机械工业出版社，2003.
[15] J M 盖尔. 材料力学（英文版·原书第7版影印版）[M]. 北京：机械工业出版社，2011.
[16] R C Hibbeler. 材料力学（第5版 影印版）[M]. 北京：高等教育出版社，2004.
[17] F P Beer，等. 材料力学（第3版 影印版）[M]，北京：清华大学出版社，2003.

如何激活本书的书伴权限

下载“书伴”

用手机浏览器打开www.weixue.co，按照提示下载对应版本的“书伴”APP。

或者用“微信”扫描左侧二维码，并点击右上角“三个点”按钮，在呼出的菜单中选择“在浏览器中打开”，并按照提示下载对应版本的“书伴”APP。

注册账号

首次打开“书伴”，选择“注册账号”，按照提示注册账号。

激活本书权限

注册账号后，刮开左侧的刮刮卡，尽可能刮干净，露出全部二维码。用已注册的账号登录书伴，点击书伴开始界面下方正中间的“扫一扫”，扫描刮开的二维码即可激活本书。

特别注意，激活时仅能绑定一个手机号码及对应的“书伴”账号。

179195

地址：北京市百万庄大街22号
邮政编码：100037
电话服务
服务咨询热线：010-88379833
读者购书热线：010-88379649
网络服务
机工官网：www.cmpbook.com
机工官博：weibo.com/cmp1952
教育服务网：www.cmpedu.com
金书网：www.golden-book.com
封面无防伪标均为盗版

机工教育微信服务号

ISBN 978-7-111-56815-5
策划编辑◎姜凤 / 封面设计◎鞠杨

ISBN 978-7-111-56815-5
9 787111 568155 >
定价：39.80元